LEHRBUCH

DER

TECHNISCHEN MECHANIK

VON

HJ. TALLQVIST,

PROFESSOR DER MECHANIK AM POLYTECHNIKUM ZU HELSINGFORS.

II.

THEORIE DER ELASTICITÄT UND FESTIGKEIT. HYDROMECHANIK.

MIT 250 FIGUREN IM TEXT.

VERLAGSACTIENGESELLSCHAFT HELIOS, HELSINGFORS.

C. SPEIDEL, POLYTECHNISCHE BUCHHANDLUNG, ZÜRICH.

HELSINGFORS
ACTIENGESELLSCHAFT LILIUS & HERTZBERG
1904.

Inhalt des zweiten Bandes.

Fünfter Teil.

Theorie der Elasticität und Festigkeit.

Dritter Abschnitt.

Schubfestigkeit.

Vierter Abschnitt.

Biegungsfestigkeit.

Fünfter Abschnitt.

Drehungsfestigkeit.

Sechster Abschnitt.

Zusammengesetzte Festigkeit.

Siebenter Abschnitt.

Die Deformationsarbeit.

Sechster Teil.

Hydromechanik.

Achter Abschnitt.

Hydrostatik.

Neunter Abschnitt.

Hydrodynamik.

Fünfter Teil.

Theorie der Elasticität und Festigkeit.

---

§ 1.

Einleitung.

Unelastische und elastische Körper.

Bei der Lösung einer grossen Zahl praktisch wichtiger Aufgaben über feste Körper ist die in den bis jetzt behandelten Teilen der Mechanik fast ausnahmslos gemachte Voraussetzung, dass die Körper starr oder unelastisch sind, nicht mehr zulässig. Im Gegenteil ist man gezwungen, die Körper als elastisch anzusehen, womit verstanden ist, dass sie *die Eigenschaft besitzen, unter dem Einfluss äusserer Kräfte ihre Form so zu verändern, dass die Formänderung mehr oder weniger wieder verschwindet, wenn die Kräftewirkung aufhört.* Diejenigen Aufgaben, bei deren Behandlung die Körper als elastisch-fest angenommen werden müssen, bilden den Gegenstand des jetzt folgenden Teiles der Mechanik, d. h. der Lehre von der Elasticität und Festigkeit (Vergl. § 50, I). Die Eigenschaft der Elasticität fehlt bei keinem Körper der Natur gänzlich, ist aber bei verschiedenen Körpern sehr verschieden. So z. B. erleiden Steine, die Mehrzahl der Metalle u. s. w. fast unmerkbare Formänderungen, auch wenn grosse Kräfte auf den Körper wirken, während z. B. beim Kautschuk und Kork schon kleine äussere Kräfte erhebliche Formänderungen

verursachen. Der verschiedene Grad der Elasticität verschiedener Körper wird durch sog. Elasticitätsconstante oder Coefficienten ausgedrückt, welche für jeden Körper durch besondere Experimente zu ermitteln sind.

Formänderung eines elastischen Körpers.

Ein Körper, welcher der Wirkung äusserer Kräfte ausgesetzt wird und dabei anfängt, sich zu deformiren, braucht eine gewisse Zeit, bevor die Formänderung vollzogen ist. Es geraten die kleinsten Teilchen des Körpers in einen veränderlichen Bewegungszustand, meistens in Schwingungen, welche mit der Zeit allmählich abnehmen. Ähnliches gilt, wenn ein System von Kräften, welche auf einen Körper wirken, entfernt wird. Im folgenden wird der veränderliche Zustand gar nicht untersucht, während dessen die Formänderungen noch fortdauern, sondern man nimmt an, dass die Formänderung der der Betrachtung unterworfenen Körper schon abgeschlossen ist. Für diesen Endzustand gelten im Falle des Gleichgewichtes die Gesetze der Statik starrer Körper. Nach vollendeter Formänderung ist jedes kleine Element des Körpers in einen gewissen Deformationszustand gelangt, welcher im allgemeinen in verschiedenen Punkten des Körpers verschieden ist und als eine veränderte Gruppirung der Molekel dieses Elementes angesehen werden kann. Entfernt man jetzt das auf den Körper wirkende System äusserer Kräfte, so zeigen im allgemeinen die einzelnen Elemente des Körpers und der ganze Körper das Bestreben, ihre ursprüngliche Form wieder anzunehmen. Wenn dies vollständig geschieht, so sagt man, die Elasticitätsgrenze sei bei der Deformation nicht überschritten worden; ist es dagegen nur unvollständig oder gar nicht der Fall, so wurde die Elasticitätsgrenze überschritten, und es sind nach dem Entfernen der äusseren Kräfte sog. bleibende Formänderungen vorhanden.

Elasticitätsgrenze.

Die Elasticitätsgrenze ist somit diejenige Grenze, bis zu welcher ein Körper durch ein System äusserer Kräfte deformirt werden kann, ohne dass er die Eigenschaft

verliert, nach Entfernen des Kräftesystemes in seinen ursprünglichen Zustand zurückzukehren. Die Elasticitätsgrenze muss durch Experimente bestimmt werden. Sie ist aber bei keinem Körper sehr scharf ausgeprägt, sondern es findet ein stetiger Übergang von denjenigen Deformationszuständen, bei welchen die bleibenden Formänderungen noch ganz unmerkbar sind, zu denjenigen Deformationszuständen statt, bei welchen merkbare bleibende Formänderungen auftreten.

Bruchgrenze.

Wenn die auf einen Körper wirkenden äusseren Kräfte[1] allmählich vergrössert werden, und zwar alle in demselben Verhältnis, so dass fortdauernd Gleichgewicht besteht, so nimmt die Deformation der einzelnen Elemente des Körpers zu. Bei einer gewissen Grösse der äusseren Kräfte zerbricht der Körper. Die entsprechende Grenze heisst Bruchgrenze und die grössten zur Herbeiführung des Bruches angewandten Kräfte geben die Bruchbelastung an. Durch Anbringen der Bruchbelastung wird die sog. Festigkeit des Materiales überwunden; jedoch braucht nicht bei allen Körpern die Bruchbelastung mit derjenigen Belastung identisch zu sein, bei welcher der Körper thatsächlich zerbricht, sondern man kann bei einigen Körpern nach erreichter Bruchbelastung die Kräfte allmählich noch etwas verkleinern und doch den Bruch herbeiführen. Die Bruchgrenze wird mit Hülfe sog. Materialprüfungsmaschinen experimentell bestimmt und ist im allgemeinen schärfer charakterisirt wie die Elasticitätsgrenze.

Elastische Nachwirkung.

Eine nähere Untersuchung zeigt, dass der Deformationszustand eines Körpers nicht nur von der Grösse der äusseren Kräfte abhängig ist, sondern zum Teil auch von der Zeit, während welcher sie auf den Körper gewirkt haben. So z. B. streckt sich ein belasteter Seiden-

[1] Man denke z. B. an einen Stab, der durch axiale Kräfte gestreckt wird.

faden oder Lederriemen noch stunden- und tagelang nach Anbringen der Belastung in messbarer Weise und verkürzt sich nur allmählich, nachdem die Belastung wieder entfernt worden ist, während harter Stahl fast momentan den schliesslichen Deformationszustand erreicht. Die genannte Erscheinung heisst elastische Nachwirkung und spielt unter anderem eine Rolle bei der Ermittelung der Bruchbelastung.[1]

Innere Spannung.

Bei der Deformation eines Körpers durch äussere Kräfte entstehen zwischen den Molekeln des Körpers innere Kräfte, welche sich verändern, so lange der variable Zustand fortdauert, nach Aufhören dieses Zustandes aber bestimmte Werte erlangen und eine weitere Deformation verhindern. Um eine analytische Behandlung der inneren Kräfte zu ermöglichen, wird die Masse des Körpers als continuirlich angesehen, und man fasst die inneren Kräfte als Flächenkräfte auf, d. h. als Kräfte, mit welchen die kleinsten Elemente des Körpers an ihren Berührungsflächen gegenseitig auf einander wirken. In einem Punkte P des Körpers (Fig. 1) wirkt auf ein kleines Flächenelement von der Grösse f die Kraft fp, wobei p die Kraft pro Flächeneinheit bezeichnet. Die Kraft fp wird innere Spannung im Punkte P und für das betrachtete Flächenelement genannt, während p oder die Kraft pro Flächeneinheit specifische Spannung (kürzer nur Spannung) heisst. Wenn das durch P gehende Flächenelement f seine Lage verändert, so verändert auch die Spannung p ihre Grösse und Richtung. Der Spannungszustand im Punkte P ist völlig bekannt, wenn zu jedem

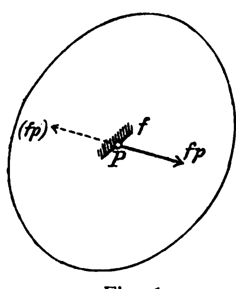


Fig. 1.

[1] In Bezug auf ausführlichere Angaben über elastische Nachwirkung, Elasticitätsgrenze u. s. w. siehe man ein grösseres Lehrbuch der Physik, wie z. B. Wüllner, I.

durch P gehenden Flächenelemente die innere Spannung angegeben werden kann. Im allgemeinen verändert sich der Spannungszustand innerhalb des Körpers von Punkt zu Punkt.

Zwischen dem Spannungs- und dem Deformationszustande in einem Punkte eines elastischen Körpers besteht ein Zusammenhang, so dass der eine berechnet werden kann, wenn der andere gegeben ist, wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die Elasticitätsconstanten des Körpers bekannt sind.

Aufgaben der Elasticitätstheorie.

Der Theorie der Elasticität bieten sich die Aufgaben dar:

1) den Spannungszustand in einem Punkte des Körpers in möglichst einfacher Weise anzugeben,

2) den Deformationszustand in einem Punkte des Körpers in möglichst einfacher Weise anzugeben,

3) den Zusammenhang zwischen dem Deformations- und dem Spannungszustande zu ermitteln,

4) bei gegebenen äusseren Kräften den Deformations- und den Spannungszustand in sämtlichen Punkten eines gegebenen Körpers zu bestimmen.

Die drei ersten Aufgaben sind Vorbereitungen zu der vierten, welche die Hauptaufgabe der allgemeinen Theorie der Elasticität bildet.

Zulässige Spannung.

Bei Körpern, welche als Teile von Bau- oder Maschinenconstructionen verwendet werden sollen, wird verlangt, dass die Deformationen und die inneren Spannungen nicht nur unterhalb der Bruchgrenze liegen, weil ja die Construction sonst zerstört würde, sondern auch, dass sie sich unterhalb der Elasticitätsgrenze befinden, damit keine bleibenden Formänderungen entstehen, welche die Haltbarkeit der Construction gefährden könnten. Die meisten auf eine wirkliche Ausführung abzielenden Berechnungen setzen einen Gleichgewichtszustand des betrachteten Con-

structionsteiles voraus.[1] Weiter kommt in Betracht, dass die idealen Bedingungen, unter welchen die Formeln entwickelt werden, in der Wirklichkeit nicht genau erfüllt sind. Fast jeder Constructionsteil befindet sich zeitweilig oder ununterbrochen in einem gewissen Schwingungszustande, in welchem die Spannungen grössere Werte erreichen als in dem Gleichgewichtszustande. *Die Spannung in dem Gleichgewichtszustande ist so zu wählen, dass die grössten Spannungen während der Schwingungen höchstens die Spannung bei der Elasticitätsgrenze erreichen.* Die so erhaltene, auf den Gleichgewichtszustand sich beziehende Spannung wird zulässige Spannung genannt.[2]

Die Durchführung des hier dargelegten Princips für die Wahl der zulässigen Spannung ist schwierig und wenig versucht worden. Man begnügt sich im allgemeinen mit der durch früher ausgeführte Constructionen gewonnenen Erfahrung und stellt mehr oder weniger empirische Regeln für die Wahl der zulässigen Spannung auf, welche bei verschiedenen Verfassern und Constructeuren etwas verschieden sind. Solche Regeln sollen hier nicht gegeben werden, sondern es werde in dieser Beziehung auf die Lehrbücher der Baumechanik hingewiesen.

Aufgaben der Festigkeitslehre.

Die in der technischen Theorie der Elasticität und Festigkeit zu lösenden Hauptaufgaben, bei welchen die zulässige Spannung in Betracht kommt, sind:

1) Die Berechnung der zulässigen Belastung, welche an einem Körper oder Constructionsteil angebracht werden darf, dessen Dimensionen gegeben sind.

[1] Bei beweglichen Maschinenteilen handelt es sich um den durch Hinzufügung der Trägheitskräfte entstehenden Gleichgewichtszustand.

[2] Die oben dargelegte rationelle Auffassung hinsichtlich der Spannungen in der Festigkeitslehre rührt von Prof. R. Kolster her.

2) Die Bestimmung der erforderlichen Dimensionen eines Constructionsteiles von gegebenem Material bei bekannter Belastung (Dimensionirung).

Hierzu kommt die Berechnung der Formänderung einer dem Material und den Dimensionen nach gegebenen Construction. In gewissen Fällen ist eine grösste zulässige Formänderung vorgeschrieben, welche früher erreicht werden kann als die zulässige Spannung.

Auflagerreactionen statisch unbestimmter Constructionen.

Die Lösung der obigen Aufgaben verlangt oft die vorherige Ermittelung gewisser unbekannter Auflagerreactionen eines in irgend einer Weise unterstützten Körpers, welche auf Grund der statischen Gleichgewichtsbedingungen allein nicht ausführbar ist. Einige Beispiele dieser Art sollen hier angegeben werden.

Bei einem belasteten Balken (Fig. 2) mit drei Stützpunkten in derselben Horizontalebene entstehen bei angemessener Auflagerung die drei verticalen Lagerdrücke A, B und C, zu deren Bestimmung die Statik nur zwei Gleichungen liefert. Als solche kann man entweder eine Projectionsgleichung bei verticaler Projectionsaxe und eine Momentengleichung oder auch zwei Momentengleichungen wählen. Die dritte Gleichgewichtsbedingung, d. h. die Projectionsgleichung bei horizontaler Projectionsaxe, ist von selbst erfüllt. Zur vollständigen Bestimmung der drei unbekannten Auflagerreactionen ist also noch eine Gleichung erforderlich, welche nur durch die Betrachtung der elastischen Formänderungen des Balkens erhalten werden kann.

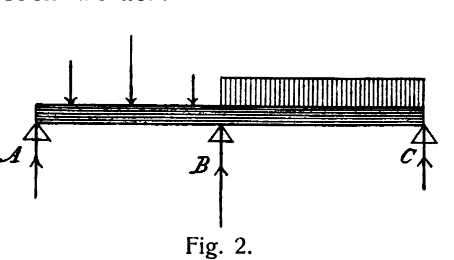


Fig. 2.

Die Auflagerreactionen eines Balkens sind in noch höherem Grade unbestimmt, wenn es mehr als drei Stützpunkte giebt.

Ein anderes Beispiel einer Construction, bei welcher die Lagerdrücke nicht bestimmbar sind, falls die Construction als unelastisch angesehen wird, bietet der Bogen mit zwei Gelenken dar (Fig. 3). Weil alle Kräfte in derselben Ebene liegen, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen. Zur Bestimmung der Reactionen in den Kämpfergelenken *A* und *B* sind aber vier Grössen erforderlich, zwei für jedes Gelenk, z. B. die Grösse der Reaction und ihr Neigungswinkel gegen die Horizontalebene. Die beiden Reactionen schneiden die Richtungslinie der Resultirenden *R* aus dem Eigengewichte und der zufälligen Belastung des Bogens in einem Punkte *C*, deren Bestim-

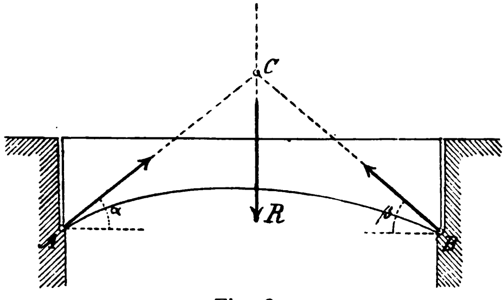


Fig. 3.

mung auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht möglich ist.

Solche Constructionen, bei welchen die Gleichgewichtsbedingungen der Statik zur vollständigen Bestimmung der Reactionen nicht ausreichen, werden s t a t i s c h u n b e s t i m m t genannt; gelingt es dagegen die Reactionen mit Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln, so heisst die Construction s t a t i s c h b e s t i m m t.

Wie in § 74, I gezeigt worden, ist der Bogen mit drei Gelenken eine statisch bestimmte Construction.

Über die Hauptaufgabe der Elasticitätstheorie.

Die Lösung der auf p. 5 angegebenen Hauptaufgabe 4) der Elasticitätstheorie erfordert die Integration eines Systemes von Differentialgleichungen, wobei gleichzeitig gewissen Bedingungen genügt werden muss. Diese In-

tegration ist nicht allgemein durchführbar. Es werden deshalb die einfachsten, für die Technik wichtigsten Specialfälle ausgewählt und jeder Fall für sich behandelt. Statt das System der Differentialgleichungen zu integriren, trifft man womöglich gewisse Annahmen in Bezug auf die inneren Spannungen oder Deformationen, welche in der Natur des Problems begründet sind, und sucht auf Grund dieser Annahmen den Differentialgleichungen und übrigen Bedingungen des Problems zu genügen. Ein wertvolles Hülfsmittel zur Bestimmung der inneren Spannungen ergiebt die folgende Methode, welche in der Festigkeitslehre allgemein angewandt wird.

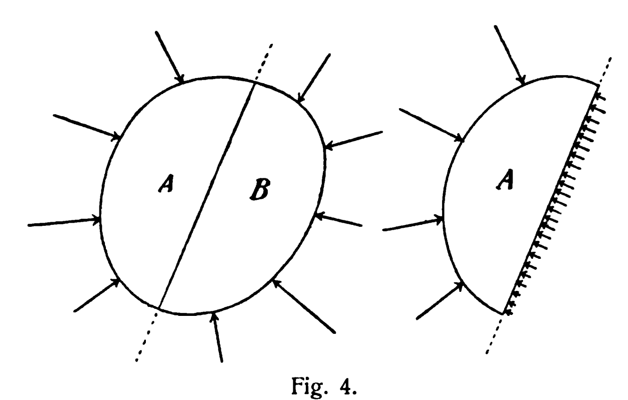


Fig. 4.

Die Schnittmethode der Festigkeitslehre.

Auf einen Körper möge ein System von Kräften wirken, welches sich im Gleichgewichte befindet (Fig. 4). Durch einen ebenen (oder krummen) Schnitt werde der Körper in zwei Teile *A* und *B* zerlegt. Das Gleichgewicht wird wieder hergestellt, wenn man die in der Schnittfläche wirkenden zunächst unbekannten Spannungen anbringt, wobei zu beachten ist, dass auf jedes Element der Schnittfläche bei *A* und *B* entgegengesetzt gerichtete und gleich grosse Spannungskräfte wirken. Folglich bilden sämtliche auf *A* in der Schnittfläche wirkenden Spannungen ein Kräftesystem, welches entgegen-

gesetzt dem Systeme der das Stück *A* angreifenden äusseren Kräfte ist. Bildet man also die Resultirende und das resultirende Kräftepaar, so sind sie zusammen den Spannungen äquivalent. Wenn z. B. die äusseren Kräfte, die auf *A* wirken, nur eine Resultirende oder nur ein resultirendes Kräftepaar ergeben, so ist dasselbe auch mit den Spannungen der Fall. Wesentlich schwieriger ist es aber die Spannung jedes Flächenelementes zu ermitteln als dasjenige Kräftesystem, mit dem die Spannungen im ganzen äquivalent sind. Zu diesem Zwecke sind, wie schon bemerkt, besondere Annahmen erforderlich, welche die Richtung der Spannungen und ihre Verteilung auf die Schnittfläche betreffen.

Im folgenden werden in Übereinstimmung mit dem oben gesagten zunächst die auf p. 5 genannten allgemeinen Aufgaben 1), 2) und 3) behandelt, und alsdann die technisch bedeutendsten Specialfälle der Aufgabe 4) nebst ihrer Anwendung auf die auf p. 6 und 7 stehenden Aufgaben in Betracht gezogen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Elasticität.

§ 2.

Der Spannungszustand in einem Punkte eines elastischen Körpers.

Normale und tangentiale Spannung.

In einem Punkte P eines elastischen Körpers wirke auf ein durch P gelegtes Flächenelement f die Spannung fp (Fig. 5). Die Coordinaten von P in Bezug auf ein rechtwinkliges räumliches Axensystem seien x, y, z, die Richtungswinkel der Normalen PN von f in Bezug auf dasselbe System seien α, β und γ, wobei die Normale nach a u s s e n von dem durch f begrenzten Körperelemente genommen werden soll; ferner seien λ, μ und ν die Richtungswinkel der Spannung p. Bezeichnet man mit φ den Winkel zwischen der Normalen PN und der Spannung p, wobei $0 < \varphi < \pi$ ist, so ergeben sich die sog. N o r m a l s p a n n u n g

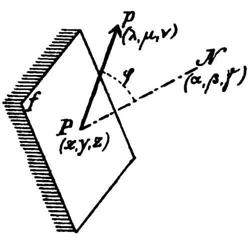


Fig. 5.

$$\sigma = p \cos \varphi$$

und die im Flächenelemente f gelegene sog. T a n g e n t i a l s p a n n u n g

$$\tau = p \sin \varphi.$$

Die Spannung σ ist positiv, wenn sie die Richtung PN hat und somit ein Zug zwischen den beiden durch f getrennten Körperelementen stattfindet, dagegen negativ, wenn die Richtung die entgegengesetzte ist, und die beiden Körperelemente einen Druck auf einander ausüben. Die Tangential- oder Schubspannung τ, welche immer positiv ist, kann nach zwei in dem Flächenelemente gezogenen Richtungen zerlegt werden.

Spannungscomponenten eines Flächenelementes.

Nimmt man jetzt im Punkte P drei zu je einer Coordinatenebene parallele Flächenelemente an (Fig. 6), so hat man drei zugehörige specifische Spannungen p_x, p_y und p_z, wobei der Index die nach aussen gerichtete Normale des betreffenden Flächenelementes angiebt. Die Spannung p_x hat eine normale Componente σ_x, parallel der x-Axe, und eine der yz-Ebene parallele tangentiale Componente, welche weiter in die beiden Componenten τ_{xy}, parallel der y-Axe, und τ_{xz}, parallel der z-Axe zerlegt wird. Hierbei giebt der erste Index die Normale des Flächenelementes, der zweite Index die Richtung der Spannungscomponente an. Für alle drei Flächenelemente ergiebt sich folgende Zusammenstellung der Spannungscomponenten:

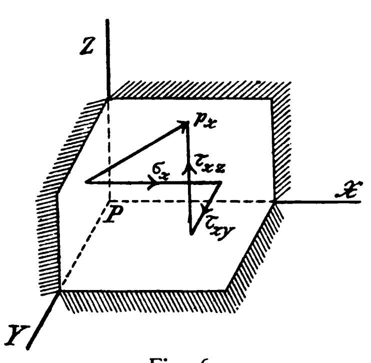


Fig. 6.

Auf das Flächenelement

YPZ wirkt	p_x	mit den Comp.	σ_x τ_{xy} τ_{xz}
„ „ „ ZPX „	p_y	„ „ „	τ_{yx} σ_y τ_{yz}
„ „ „ XPY „	p_z	„ „ „	τ_{zx} τ_{zy} σ_z
			in den Richtungen PX, PY, PZ

Beziehungen zwischen den Spannungscomponenten.

Aus einem elastischen Körper werde ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kantenlängen dx, dy und dz

geschnitten (Fig. 7). Auf die Seitenfläche *BPC* wirkt pro Flächeneinheit die Kraft (p_x) mit den Componenten $-\sigma_x$, $-\tau_{xy}$, $-\tau_{xz}$, folglich auf die ganze Seitenfläche eine Kraft mit den Componenten $-\sigma_x\,dy\,dz$, $-\tau_{xy}\,dy\,dz$ und $-\tau_{xz}\,dy\,dz$. Auf die entgegengesetzte Seite $B'P'C'$ wirkt eine Kraft mit den Componenten $(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx)\,dy\,dz$, $(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx)\,dy\,dz$ und $(\tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx)\,dy\,dz$. Für sämtliche sechs Seitenflächen des Parallelepipeds ergiebt sich folgende Zusammenstellung der Spannungscomponenten parallel den Coordinatenaxen:

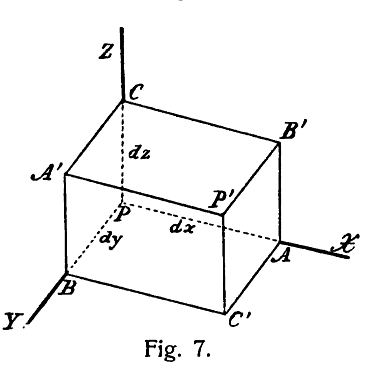


Fig. 7.

		X	Y	Z
Auf die Fläche	*BPC*	$-\sigma_x\,dy\,dz$	$-\tau_{xy}\,dy\,dz$	$-\tau_{xz}\,dy\,dz$
„ „ „	*CPA*	$-\tau_{yx}\,dz\,dx$	$-\sigma_y\,dz\,dx$	$-\tau_{yz}\,dz\,dx$
„ „ „	*APB*	$-\tau_{zx}\,dx\,dy$	$-\tau_{zy}\,dx\,dy$	$-\sigma_z\,dx\,dy$
„ „ „	$B'P'C'$	$(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx)\,dy\,dz$	$(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx)\,dy\,dz$	$(\tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx)\,dy\,dz$
„ „ „	$C'P'A'$	$(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy)\,dz\,dx$	$(\sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy)\,dz\,dx$	$(\tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy)\,dz\,dx$
„ „ „	$A'P'B'$	$(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz)\,dx\,dy$	$(\tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz)\,dx\,dy$	$(\sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz)\,dx\,dy.$

Auf die Masse des parallelepipedischen Körperelementes kann ausserdem eine äussere Kraft (wie z. B. die Schwere) wirken, deren Componenten bezogen auf die Volumeneinheit mit *X*, *Y* und *Z* bezeichnet werden mögen, so dass also die Componenten der Gesamtkraft

$$X\,dx\,dy\,dz \quad Y\,dx\,dy\,dz \quad Z\,dx\,dy\,dz$$

betragen. Alle jetzt aufgezählten Kräfte bilden zusammen ein räumliches System im Gleichgewichte und erfüllen

folglich die gewöhnlichen sechs Bedingungen, die drei Projectionsgleichungen und die drei Momentengleichungen.

Es mögen zuerst die Momentengleichungen betrachtet werden. Bis auf kleine Grössen höherer Ordnung kann man voraussetzen, dass die resultirenden Spannungen in den Mittelpunkten der Flächen angreifen. In Bezug auf die Axe *PX* geben folgende Kräfte Momente:

$$\begin{cases} -\tau_{xy}\,dy\,dz, \\ (\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx)\,dy\,dz, \end{cases} \quad \begin{cases} -\tau_{xz}\,dy\,dz, \\ (\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx)\,dy\,dz, \end{cases} \quad \begin{cases} (\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz)\,dx\,dy, \\ (\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy)\,dz\,dx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sigma_y\,dz\,dx, \\ (\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy)\,dz\,dx, \end{cases} \quad \begin{cases} -\sigma_z\,dx\,dy, \\ (\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz)\,dx\,dy. \end{cases}$$

Hierzu kommt noch die äussere Kraft. Alle übrigen Kräfte sind entweder parallel der Axe *PX* oder schneiden sie, geben also das Moment Null. Die obigen Kräfte sind zu fünf Gruppen von je zwei Kräften vereinigt. Die Summe der Momente der beiden Kräfte einer Gruppe ist eine kleine Grösse vierter Ordnung, wenn dx, dy und dz als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden. Auch das Moment der äusseren Kraft ist von der vierten Ordnung. Eine Ausnahme macht aber die Gruppe der Kräfte

$$\begin{cases} (\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz)\,dx\,dy, \\ (\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy)\,dz\,dx, \end{cases}$$

welche die Glieder dritter Ordnung

$$-\tau_{zy}\,dx\,dy\,.\,dz+\tau_{yz}\,dz\,dx\,.\,dy$$

liefert. Da die Summe aller Momente Null ist, müssen die Glieder dritter Ordnung für sich verschwinden, d. h. man erhält

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \tag{1}$$

Ebenso folgt

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

und

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}.$$

Es giebt somit nur drei von einander verschiedene tangentiale Spannungscomponenten; ihre Bezeichnung kann jetzt vereinfacht werden, indem man setzt

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \tau_x, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \tau_y, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \tau_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Weil die Wahl der rechtwinkligen Coordinatenaxen beliebig ist, so enthält die Formel (1) den Satz: *Die in zwei auf einander senkrechten Schnitten eines elastischen Körpers wirkenden, gegen die Kante normalen tangentialen Spannungen sind gleich gross und beide entweder nach der Kante hin oder von der Kante weg gerichtet.*

Setzt man jetzt die Projectionssumme der auf p. 14 angegebenen Kräfte für jede Coordinatenaxe gleich Null und wendet zugleich die abgekürzten Bezeichnungen (2) an, so folgt nach Division mit dem gemeinschaftlichen Factor $dx\,dy\,dz$ das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

welchen also in jedem elastischen Körper die partiellen Ableitungen der Spannungscomponenten und die Componenten der äusseren Kraft genügen müssen.

Spannungscomponenten eines beliebigen Flächenelementes.

Die sechs Spannungscomponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y und τ_z bestimmen den in einem Punkte herrschenden Spannungszustand vollständig, da jetzt gezeigt werden kann, dass die Spannung eines beliebigen Flächenelementes mit ihrer Hülfe erhalten wird. Durch die Ecken *A*, *B* und *C* des Parallelepipeds in Fig. 7 werde eine Ebene geführt (Fig. 8); dabei entsteht ein tetraedrisches Körperelement und ein schiefes Flächenelement *ABC*, dessen Grösse mit *f* bezeichnet werde, das eine Normale *PN* mit den Richtungswinkeln α, β, γ besitzt und auf das die gesuchte specifische Spannung *p* mit den Richtungswinkeln λ, μ und ν wirkt. Für die Seitenflächen des Tetraeders gelten die Relationen

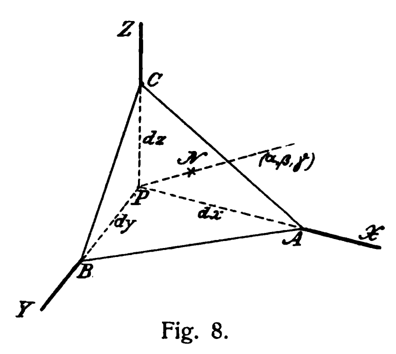


Fig. 8.

$$BPC = \tfrac{1}{2}\, dy\, dz = f \cos\alpha,$$
$$CPA = \tfrac{1}{2}\, dz\, dx = f \cos\beta,$$
$$APB = \tfrac{1}{2}\, dx\, dy = f \cos\gamma.$$

Wenn man die Summe der Projectionen aller auf das Tetraeder wirkenden Kräfte auf die x-Axe gleich Null setzt, so erhält man die Gleichung

$$fp \cos\lambda - \sigma_x f \cos\alpha - \tau_z f \cos\beta - \tau_y f \cos\gamma + \tfrac{1}{6} X\, dx\, dy\, dz = 0,$$

woraus jedoch das letzte Glied verschwindet, weil es eine kleine Grösse dritter Ordnung ist, während alle übrigen Glieder kleine Grössen zweiter Ordnung darstellen. Nach Division mit *f* und ähnlicher Rechnung für die beiden

anderen Coordinatenaxen folgt zur Bestimmung der Spannung p das System von Gleichungen

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
p \cos \lambda &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma, \\
p \cos \mu &= \tau_z \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma, \\
p \cos \nu &= \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma,
\end{aligned}
$$

im Verein mit der Formel für die Richtungscosinusse

$$
(5)\qquad \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1.
$$

Spannungs-ellipsoid.

Die Spannung p auf das Flächenelement ABC kann geometrisch veranschaulicht werden durch eine von P aus abgetragene Strecke, welche die Richtung und Grösse von p hat. Es seien ξ, η und ζ die Coordinaten des Endpunktes dieser Strecke in Bezug auf das betrachtete Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte P. Alsdann ist

$$
\xi = p \cos \lambda, \quad \eta = p \cos \mu, \quad \zeta = p \cos \nu
$$

und die Gleichungen (4) ergeben

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma, \\
\eta &= \tau_z \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma, \\
\zeta &= \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma.
\end{aligned}
$$

Dazu kommt noch die Formel für die Richtungscosinusse

$$
(7)\qquad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.
$$

Eliminirt man $\cos \alpha$, $\cos \beta$ und $\cos \gamma$ zwischen den Gleichungen (6) und (7), so erhält man die Gleichung einer Fläche, welche die Endpunkte aller der abgetragenen Strecken p enthält. Weil das Resultat der Elimination vom zweiten Grade in Bezug auf ξ, η und ζ ist, und die Spannung p nur endliche Werte annimmt, so ist jene Fläche ein Ellipsoid. Sie wird das Spannungsellipsoid genannt.

Die Ausführung der Elimination möge unterbleiben; dagegen soll die Gleichung des Spannungsellipsoides in Bezug auf ein schiefwinkliges Axensystem aufgestellt

werden, dessen Axen die Richtungen der auf die früheren Coordinatenebenen wirkenden Spannungen p_x, p_y und p_z haben. In Bezug auf die bis jetzt gebrauchten rechtwinkligen Axen sind die Richtungscosinusse

$$\begin{array}{llll} & \text{von } p_x & p_y & p_z: \\ \text{gleich} & \frac{\sigma_x}{p_x}, \frac{\tau_z}{p_x}, \frac{\tau_y}{p_x}, & \frac{\tau_z}{p_y}, \frac{\sigma_y}{p_y}, \frac{\tau_x}{p_y}, & \frac{\tau_y}{p_z}, \frac{\tau_x}{p_z}, \frac{\sigma_z}{p_z}. \end{array}$$

Bezeichnet man ferner die schiefwinkligen Coordinaten des Punktes (ξ, η, ζ) mit ξ', η', ζ', so ergiebt sich durch Projection des Coordinatenpolygons ξ', η', ζ' auf PX,

$$p \cos \lambda = \xi' \frac{\sigma_x}{p_x} + \eta' \frac{\tau_z}{p_y} + \zeta' \frac{\tau_y}{p_z};$$

der Vergleich mit der ersten Gleichung (4) liefert alsdann

$$\cos \alpha = \frac{\xi'}{p_x}, \quad \cos \beta = \frac{\eta'}{p_y}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta'}{p_z}.$$

Wenn diese Ausdrücke in die Gleichung (7) eingesetzt werden, so folgt schliesslich die gesuchte Gleichung des Spannungsellipsoides in Bezug auf die schiefwinkligen Axen

$$\left(\frac{\xi'}{p_x}\right)^2 + \left(\frac{\eta'}{p_y}\right)^2 + \left(\frac{\zeta'}{p_z}\right)^2 = 1. \tag{8}$$

Da als Axen des ursprünglichen Coordinatensystemes drei beliebige, zu einander senkrechte Richtungen gewählt werden können, enthält die Gleichung (8) den Satz: *Die Spannungen auf drei beliebige auf einander senkrechte Flächenelemente im Punkte P sind conjugirte Halbmesser des Spannungsellipsoides.*

Hauptspannungen.

Unter den Spannungen p verdienen diejenigen drei, welche der Richtung nach mit den Hauptaxen des Ellipsoides zusammenfallen, besondere Aufmerksamkeit. Sie werden Hauptspannungen genannt; eine von ihnen

ist die grösste, eine andere die kleinste unter sämtlichen in dem betrachteten Punkte vorkommenden Spannungen. Jede Hauptspannung steht senkrecht auf das zugehörige Flächenelement. Zum Beweise hierfür wird zunächst die Normalcomponente der Spannung in einem beliebigen Flächenelemente gebildet. Sie ist gleich

$$\sigma = p \cos\varphi = p\,(\cos\lambda \cos\alpha + \cos\mu \cos\beta + \cos\nu \cos\gamma);$$

mit Anwendung der Gleichungen (4) folgt hieraus

$$\text{(9)}\quad \begin{aligned} \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + \\ + 2\tau_x \cos\beta \cos\gamma + 2\tau_y \cos\gamma \cos\alpha + 2\tau_z \cos\alpha \cos\beta. \end{aligned}$$

Von dem Punkte P aus werde jetzt in der Richtung der Normalspannung σ eine Strecke $\frac{k^2}{\sqrt{|\sigma|}}$ abgetragen, wobei k eine beliebige Constante bezeichnet. Der Endpunkt dieser Strecke hat die Coordinaten

$$x = \frac{k^2 \cos\alpha}{\sqrt{|\sigma|}},\quad y = \frac{k^2 \cos\beta}{\sqrt{|\sigma|}},\quad z = \frac{k^2 \cos\gamma}{\sqrt{|\sigma|}}$$

und liegt nach (9) auf einer Fläche mit der Gleichung

$$\text{(10)}\quad \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_x yz + 2\tau_y zx + 2\tau_z xy = \pm k^4,$$

also auf einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades, welche ein Ellipsoid ist, wenn alle Normalspannungen entweder Zugspannungen oder Druckspannungen sind, und von zwei zusammengehörenden Hyperboloiden mit gemeinsamem Asymptotenkegel gebildet wird, wenn die Normalspannungen teils Zug-, teils Druckspannungen sind. Werden die Hauptaxenrichtungen dieser Fläche als Coordinatenaxen genommen, so nimmt ihre Gleichung die Gestalt

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 = \pm k^4$$

an; hieraus geht hervor, dass für jene Wahl der Coordinatenaxen im Punkte P $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ ist. In den

Hauptebenen der Fläche (10) kommen also nur Normalspannungen vor. Sie seien bez. σ_1, σ_2 und σ_3, wobei das Vorzeichen als schon einbegriffen zu denken ist. *In jedem Punkte eines elastischen Körpers giebt es also drei zu einander senkrechte Ebenen, für welche die Spannung eine Normalspannung ist.* Weil diese drei Spannungen nach dem eben erhaltenen Satze conjugirte Halbmesser des Spannungsellipsoides sind, müssen sie die halben Hauptaxen des Ellipsoides bilden. Hieraus geht weiter hervor, dass die Richtungen der Hauptaxen der Fläche (10) und des Spannungsellipsoides zusammenfallen.

Zur analytischen Bestimmung der Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 bei gegebenen Werten der sechs auf p. 16 angeführten Spannungscomponenten, welche den Spannungszustand im Punkte vollständig definiren, genügt es auf Grund der Gleichungen (4) die Bedingung auszudrücken, dass die Spannung p auf dem entsprechenden Flächenelemente senkrecht stehen soll. Wenn eine Hauptspannung allgemein mit σ bezeichnet wird, so darf man setzen

$$p = \sigma, \quad \cos\lambda = \cos\alpha, \quad \cos\mu = \cos\beta, \quad \cos\nu = \cos\gamma$$

und erhält das System der Gleichungen

$$(11) \qquad \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma &= 0, \\ \tau_z\cos\alpha + (\sigma_y - \sigma)\cos\beta + \tau_x\cos\gamma &= 0, \\ \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + (\sigma_z - \sigma)\cos\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination von α, β und γ zwischen diesen Gleichungen ergiebt sich zur Berechnung der Grösse der drei Hauptspannungen die Gleichung dritten Grades

$$(12) \qquad \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - (\sigma_x - \sigma)\tau_x^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_y^2 \\ - (\sigma_z - \sigma)\tau_z^2 + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0, \end{aligned}$$

deren drei Wurzeln σ_1, σ_2 und σ_3 alle reell sind, was jedoch hier nicht bewiesen werden soll. Alsdann folgen die Richtungscosinusse jeder Hauptspannung aus den Gleichungen (11) und (7).

Richtungsfläche der Spannungen.

Das Spannungsellipsoid liefert die in jeder gegebenen Richtung wirkende Spannung p. Zur Bestimmung des zu dieser Spannung gehörenden Flächenelementes wird die sog. Richtungsfläche der Spannungen benützt.

In Bezug auf ihre Hauptaxen als Coordinatenaxen lautet die Gleichung des Spannungsellipsoides

$$\frac{\xi^2}{\sigma_1^2}+\frac{\eta^2}{\sigma_2^2}+\frac{\zeta^2}{\sigma_3^2}=1. \tag{13}$$

In Bezug auf dasselbe Coordinatensystem stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{\sigma_1}+\frac{y^2}{\sigma_2}+\frac{z^2}{\sigma_3}=\pm k^2, \tag{14}$$

wo k eine beliebige Constante bezeichnet, eine Mittelpunktsfläche zweiten Grades dar, welche mit dem Spannungsellipsoide gemeinsame Hauptaxenrichtungen hat. Es seien jetzt α, β, γ die Richtungswinkel der Normalen eines Flächenelementes, λ, μ, ν die Richtungswinkel der Spannung dieses Flächenelementes und a, b, c die Richtungswinkel der Normalen der Fläche (14) in demjenigen Punkte, in welchem sie von der Richtungslinie der Spannung p getroffen wird, alles in Bezug auf die Hauptaxen der beiden Flächen zweiten Grades. Dann folgt

$$\cos a : \cos b : \cos c = \frac{x}{\sigma_1} : \frac{y}{\sigma_2} : \frac{z}{\sigma_3} = \frac{\cos\lambda}{\sigma_1} : \frac{\cos\mu}{\sigma_2} : \frac{\cos\nu}{\sigma_3}.$$

Die Gleichungen (4) ergeben jetzt

$$p\cos\lambda = \sigma_1\cos\alpha,\ p\cos\mu = \sigma_2\cos\beta,\ p\cos\nu = \sigma_3\cos\gamma$$

und man findet somit:

$$\cos a : \cos b : \cos c = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma,$$

d. h. das betrachtete Flächenelement ist parallel der Tangentenebene der Fläche (14) in demjenigen Punkte, in

welchem die Spannung auf das Flächenelement die gesuchte Richtungsfläche (14) trifft. *Die Richtung der Spannung eines Flächenelementes ist also in Bezug auf die Fläche (14) zu der Ebene des Flächenelementes conjugirt.*

Die Richtungsfläche der Spannungen ist ein Ellipsoid, wenn die drei Hauptspannungen alle positiv oder alle negativ sind, und besteht in jedem anderen Falle aus zwei zusammengehörenden Hyperboloiden, einem einschaligen und einem zweischaligen, denen der Asymptotenkegel gemeinsam ist. Im letzteren Falle giebt es Flächenelemente, in welchen nur Tangential- oder Schubspannungen vorhanden sind, und zwar in den Tangentenebenen des Asymptotenkegels. Denn eine derartige Ebene enthält die zu ihr selbst conjugirte Richtung, welche ja ihre Berührungslinie mit dem Asymptotenkegel ist.

§ 3.

Der Deformationszustand in einem Punkte eines elastischen Körpers.

Allgemeine Bestimmung der Deformation in einem Punkte.

Ein Punkt P eines elastischen Körpers habe die Coordinaten x, y und z in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem, wenn der Körper sich in seinem ursprünglichen Zustande befindet, dagegen die Lage P' mit den Coordinaten $x+\xi$, $y+\eta$ und $z+\zeta$, nachdem der Körper durch Einwirkung äusserer Kräfte deformirt worden ist (Fig. 9). Es bezeichnen hierbei ξ, η, und ζ kleine Grössen. Die Coordinaten eines Punktes Q in der Nähe von P seien in dem ursprünglichen Zustande

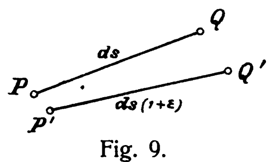


Fig. 9.

$$x+dx,\ y+dy,\ z+dz,$$

und die Länge der Strecke PQ werde mit ds bezeichnet. Die Richtungscosinusse der Strecke PQ sind dann

(15) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

In dem deformirten Zustande sind die Coordinaten des Punktes Q', in welchen der Punkt Q übergegangen ist, bez.

$$x + dx + \xi + d\xi = x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz,$$

$$y + dy + \eta + d\eta = y + dy + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz,$$

$$z + dz + \zeta + d\zeta = z + dz + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz.$$

Die Projectionen der Strecke $P'Q'$ auf die Coordinatenaxen sind also $dx + d\xi$, $dy + d\eta$ und $dz + d\zeta$. Die Länge der Strecke $P'Q'$ kann in die Form $ds\,(1 + \varepsilon)$ gesetzt werden, wobei $\varepsilon = \frac{P'Q' - PQ}{PQ}$ ist und die Dehnung im Punkte P nach der Richtung PQ heisst. Die Dehnung ist zufolge der getroffenen Voraussetzung über die Natur der Deformation immer eine sehr kleine Grösse; sie ist positiv oder negativ, je nachdem PQ verlängert oder verkürzt wird. Mit den obigen Bezeichnungen erhält man

$$ds^2 (1 + \varepsilon)^2 = (dx + d\xi)^2 + (dy + d\eta)^2 + (dz + d\zeta)^2$$

und auf Grund der Beziehung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

indem man beiderseits nur die kleinen Glieder der niedrigeren Ordnung nimmt,

$$\varepsilon\, ds^2 = dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta$$

oder

$$\varepsilon = \frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{ds}.$$

Führt man hier die ausführlichen Ausdrücke für $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$ ein und macht von den Formeln (15) Gebrauch, so findet man für die Dehnung ε den Wert

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma$$
(16)
$$+ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta.$$

In dieser allgemeinen Formel kommen sechs Coefficienten vor, welche also den Deformationszustand im Punkte P vollständig bestimmen, wenn man sich wie oben mit den Gliedern von der niedrigsten Ordnung begnügt. Für diese Coefficienten sollen besondere Bezeichnungen eingeführt werden und zwar

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$
(17)
$$\gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y},\quad \gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z},\quad \gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Die Formel (16) geht dabei in

$$\varepsilon = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\cos^2\beta + \varepsilon_z\cos^2\gamma + \gamma_x\cos\beta\cos\gamma +$$
(18)
$$+ \gamma_y\cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z\cos\alpha\cos\beta$$

über.

Die Bedeutung der Grössen ε und γ.

Die drei Grössen ε sowie die drei Grössen γ haben eine besondere Bedeutung. Nimmt man nämlich in der Formel (18) $\beta = \gamma = 90°$, $\alpha = 0$, so folgt $\varepsilon = \varepsilon_x$. Es bezeichnet also ε_x die Dehnung nach der x-Axe; ε_y und ε_z sind die Dehnungen nach den beiden anderen Axen. Um die Bedeutung der Grösse γ_x zu finden, werden von P aus die Stücke $PB = dy$ und $PC = dz$ parallel der y- und der z-Axe abgetragen (Fig. 10). Der Punkt C wird bei der Deformation des Körpers relativ zu P um eine

kleine Strecke verschoben, deren Componente parallel der y-Axe

$$CC_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} dz$$

ist, d. h. gleich dem Werte von $d\eta$ für $dx = 0$ und $dy = 0$. Ebenso hat die Verschiebung von B relativ zu P die zur z-Axe parallele Componente

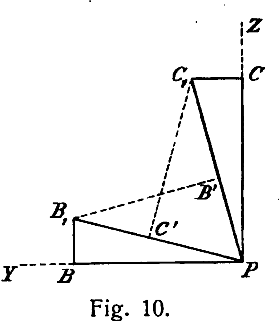


Fig. 10.

$$BB_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy.$$

Bei der Deformation vermindert sich der rechte Winkel BPC um einen Betrag, für welchen auf Grund der Kleinheit von CC_1 und BB_1 der Wert

$$CPC_1 + BPB_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \gamma_x$$

erhalten wird. Eine analoge Bedeutung haben γ_y und γ_z.

Deformation eines Parallelepipeds.

Ein im Punkte P als Ecke construirtes kleines rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kantenlängen $PA = dx$, $PB = dy$ und $PC = dz$ (Fig. 7) verwandelt sich bei der Deformation in ein schiefwinkliges Parallelepiped mit den Kantenlängen $dx\,(1 + \varepsilon_x)$, $dy\,(1 + \varepsilon_y)$ und $dz\,(1 + \varepsilon_z)$; die Neigungswinkel zwischen den Seitenebenen sind: $\frac{\pi}{2} - \gamma_x$ bei den Kanten PA und $P'A'$, $\frac{\pi}{2} + \gamma_x$ bei den Kanten BC' und $B'C$, $\frac{\pi}{2} - \gamma_y$ bei den Kanten PB und $P'B'$, $\frac{\pi}{2} + \gamma_y$ bei den Kanten CA' und $C'A$ u. s. w.

Die Grössen γ als Gleitungscoefficienten.

Die Grössen γ lassen sich auch als Coefficienten einer S c h i e b u n g oder G l e i t u n g paralleler Schichten des Körpers relativ zu einander auffassen. Zieht man in

der Figur 10 aus B_1 die Senkrechte B_1B' auf PC_1, so giebt PB' die Verschiebung einer zur xz-Ebene parallelen Schicht durch B im Verhältnis zu einer eben solchen Schicht durch P an. Wird die Verschiebung durch den gegenseitigen Abstand PB zwischen den beiden Schichten dividirt, so folgt

$$\frac{PB'}{PB} = \frac{PB'}{PB_1} = \text{Winkel } PB_1B' = \gamma_x.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{PC'}{PC} = \frac{PC'}{PC_1} = \text{Winkel } PC_1C' = \gamma_x.$$

Es ist also γ_x die Gleitung der zu der xy-Ebene parallelen Schichten in der Richtung der y-Axe ebenso wie die Gleitung der zu der xz-Ebene parallelen Schichten in der Richtung der z-Axe. Eine ähnliche Bedeutung haben γ_y und γ_z.

Deformation einer Kugel. Deformationsellipsoid.

Zur Veranschaulichung des Deformationszustandes im Punkte P construirt man eine Kugel mit dem Mittelpunkte P und dem sehr kleinen Radius ds. Es seien vor der Deformation PA, PB und PC die den Coordinatenaxen parallelen Radien der Kugel, dx, dy und dz die Coordinaten eines Punktes Q der Kugelfläche in Bezug auf das System PA, PB und PC. Bei der Deformation liefern die rechtwinkligen Coordinaten von Q die schiefwinkligen Coordinaten

$$dx_1 = dx\,(1 + \varepsilon_x),\quad dy_1 = dy\,(1 + \varepsilon_y),\quad dz_1 = dz\,(1 + \varepsilon_z)$$

in Bezug auf ein Coordinatensystem mit den deformirten Richtungen von PA, PB und PC als Axen. Auf Grund der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ergiebt sich jetzt die Gleichung

$$(19)\quad \left(\frac{dx_1}{ds\,(1+\varepsilon_x)}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds\,(1+\varepsilon_y)}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds\,(1+\varepsilon_z)}\right)^2 = 1,$$

welche zeigt, dass dx_1, dy_1 und dz_1 die Coordinaten eines Punktes eines Ellipsoides mit den conjugirten Halbmessern $ds(1+\varepsilon_x)$, $ds(1+\varepsilon_y)$ und $ds(1+\varepsilon_z)$ sind. Es folgt also der Satz: ***Eine unendlich kleine Kugel verwandelt sich durch die Deformation in ein Ellipsoid, und zwar so, dass drei zu einander senkrechte Kugelradien in drei conjugirte Halbmesser des Ellipsoides übergehen.*** Das Ellipsoid heisst Deformationsellipsoid.

Hauptdehnungen.

Unter den vom Punkte P ausgehenden Richtungen verdienen diejenigen drei eine besondere Aufmerksamkeit, welche mit den Hauptaxen des Deformationsellipsoides zusammenfallen. Sie sind sowohl vor wie nach der Deformation zu einander senkrecht. Nach einer von diesen Richtungen findet die grösste, nach einer anderen die kleinste (im algebraischen Sinne verstanden) von allen im Punkte P überhaupt vorkommenden Dehnungen statt. Diese drei Dehnungen, welche sich auf die Hauptaxenrichtungen des Deformationsellipsoides beziehen, heissen Hauptdehnungen. Zu ihrer analytischen Bestimmung sucht man z. B. das Maximum und Minimum der Grösse ε in der Formel (18)

$$\varepsilon = F(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta$$

auf unter gleichzeitiger Erfüllung der Gleichung

$$(20)\qquad f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 0.$$

Nach der Methode von Lagrange folgt mit Anwendung eines unbestimmten Multiplicators λ das System der Gleichungen

$$(21)\qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{\partial(F-\lambda f)}{\partial\cos\alpha} &= (\varepsilon_x-\lambda)\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma_z\cos\beta + \tfrac{1}{2}\gamma_y\cos\gamma = 0, \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial(F-\lambda f)}{\partial\cos\beta} &= \tfrac{1}{2}\gamma_z\cos\alpha + (\varepsilon_y-\lambda)\cos\beta + \tfrac{1}{2}\gamma_x\cos\gamma = 0, \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial(F-\lambda f)}{\partial\cos\gamma} &= \tfrac{1}{2}\gamma_y\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma_x\cos\beta + (\varepsilon_z-\lambda)\cos\gamma = 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ und addirt, so findet man mit Anwendung der Gleichungen (18) und (20) $\lambda=\varepsilon$, d. h. die Werte des Multiplicators sind die gesuchten Hauptdehnungen selbst. Zur Berechnung ihrer Grösse werden jetzt $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ zwischen den drei Gleichungen (21) eliminirt. Das Resultat der Elimination ist eine Gleichung dritten Grades in Bezug auf λ, welche unmittelbar aufgeschrieben werden kann, wenn man beachtet, dass das System (21) dadurch aus dem früheren Systeme (11) hervorgeht, dass man σ_x, σ_y und σ_z mit bez. ε_x, ε_y und ε_z sowie τ_x, τ_y und τ_z mit bez. $\frac{1}{2}\gamma_x$, $\frac{1}{2}\gamma_y$ und $\frac{1}{2}\gamma_z$ vertauscht. Wird ausserdem ε durch λ ersetzt, so ist die gesuchte Gleichung, welche hier der Gleichung (12) entspricht,

$$4(\varepsilon_x-\varepsilon)(\varepsilon_y-\varepsilon)(\varepsilon_z-\varepsilon)-(\varepsilon_x-\varepsilon)\gamma_x^2-(\varepsilon_y-\varepsilon)\gamma_y^2-(\varepsilon_z-\varepsilon)\gamma_z^2$$
$$(22) \qquad +\gamma_x\gamma_y\gamma_z=0.$$

Diese Gleichung hat drei reelle Wurzeln. Sind sie gefunden, so ergeben sich die Richtungen der Hauptaxen des Deformationsellipsoides mit Hülfe der Gleichungen (21) und (20).

Wählt man die Hauptaxen des Deformationsellipsoides zu Coordinatenaxen, so vereinfacht sich der allgemeine Ausdruck (18) für die Dehnung. Die Gleichung (22) muss jetzt die Wurzeln ε_x, ε_y und ε_z besitzen, welche um ihre Bedeutung als Hauptdehnungen hervorzuheben mit bez. ε_1, ε_2 und ε_3 bezeichnet werden mögen. Die notwendige Bedingung hierfür ist, dass sämtliche Gleitungen γ gleich Null sind. Die Formel (18) ergiebt dann

$$(23) \qquad \varepsilon=\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\cos^2\beta+\varepsilon_3\cos^2\gamma.$$

Zugleich folgt der Satz: *In jedem Punkte eines elastischen Körpers giebt es drei zu einander senkrechte Ebenen, in welchen keine Gleitungen vorkommen.*

Verhältnismässige Volumenänderung.

Indem man die Gleichung (22) nach Potenzen von ε ordnet, erhält man

$$\varepsilon^3 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\varepsilon^2 + \left(\varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y - \tfrac{1}{4}\gamma_x^2 - \tfrac{1}{4}\gamma_y^2 - \tfrac{1}{4}\gamma_z^2\right)\varepsilon$$
$$- \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \tfrac{1}{4}\varepsilon_x\gamma_x^2 + \tfrac{1}{4}\varepsilon_y\gamma_y^2 + \tfrac{1}{4}\varepsilon_z\gamma_z^2 - \tfrac{1}{4}\gamma_x\gamma_y\gamma_z = 0.$$

Hiernach ist

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

d. h. *die Summe der Dehnungen nach drei zu einander senkrechten Richtungen ist constant und gleich der Summe der Hauptdehnungen.* Diese Summe hat eine besondere Bedeutung. Wenn ein rechtwinkliges Parallelepiped mit der Ecke P und den Kanten dx, dy, dz deformirt wird, so verändert sich sein Volumen dv auf Grund der Längenänderung der Kanten, während die Gleitungen das Volumen nicht beeinflussen. Bis auf kleine Grössen höherer Ordnung ist das Volumen nach der Deformation gleich

$$dv_1 = dx\,(1 + \varepsilon_x)\,dy\,(1 + \varepsilon_y)\,dz\,(1 + \varepsilon_z) =$$
$$= dx\,dy\,dz\,(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = dv\,(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

woraus die verhältnismässige Volumenänderung

$$e = \frac{dv_1 - dv}{dv} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \tag{24}$$
$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

hervorgeht. Die Summe der Dehnungen nach drei zu einander senkrechten Richtungen ist also gleich der verhältnismässigen Volumenänderung.

§ 4.

Der Zusammenhang zwischen dem Deformations- und dem Spannungszustande.

Isotrope Körper.

Bei der folgenden Untersuchung des Zusammenhanges, welcher zwischen dem Deformations- und dem Span-

nungszustande in einem Punkte eines elastischen Körpers stattfindet, wird nur der Fall betrachtet, dass der Körper nicht nur homogen, d. h. in allen Punkten gleich beschaffen, sondern auch isotrop, d. h. in jedem Punkte nach allen Richtungen gleich beschaffen ist. Dieselbe Voraussetzung über die Beschaffenheit der betrachteten elastischen Körper wird auch in allen folgenden Abschnitten gemacht.

Hauptspannungen und Dehnungen.

Man schliesst ohne weiteres, dass bei einem isotropen Körper die Hauptaxen des Spannungsellipsoides und des Deformationsellipsoides in einem Punkte dieselben Richtungen haben, d. h. dass die Richtungen der Hauptspannungen mit denen der Hauptdehnungen übereinstimmen. Es werde ein kleines Körperelement von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds betrachtet, dessen Kanten den Hauptaxen der obigen Ellipsoide parallel sind. Würde nur die Hauptzugspannung σ_1 allein auf das Parallelepiped wirken, so erhielte man erfahrungsgemäss eine Verlängerung in der Richtung der betreffenden Axe und Verkürzungen aller zu derselben senkrechten Dimensionen — dies ist algebraisch zu verstehen, so dass negative Zugspannungen mit Druckspannungen, negative Verlängerungen mit Verkürzungen u. s. w. identisch sind. Zugleich hat man gefunden, dass unterhalb einer gewissen Grenze, der sog. Proportionalitätsgrenze, welche bei gewissen Körpern nahezu mit der Elasticitätsgrenze zusammenfällt (siehe auch p. 45) die Verlängerung in der Richtung der Kraft und die Verkürzung senkrecht dazu der Spannung proportional sind. Nimmt man die Richtung von σ_1 zur x-Axe und bezeichnet den Dehnungscoefficienten mit ε_x, so hat man deshalb $\sigma_1 = E\varepsilon_x$, wobei E eine Elasticitätsconstante des betrachteten Körpers ist. Diese Constante wird Elasticitätsmodul für Zug und Druck, kürzer nur Elasticitätsmodul genannt. (Näheres darüber in § 6 unten). Nach den Querrichtun-

Elasticitätsmodul für Zug und Druck.

gen entsteht eine Dehnung mit dem Coefficienten $-\frac{\varepsilon_x}{m}$, wobei m eine Zahl ist, welche den absoluten Betrag des Verhältnisses zwischen den Coefficienten der Längsdehnung und der Quercontraction angiebt, und somit eine zweite Elasticitätsconstante des betrachteten Körpers darstellt. In derselben Weise wie σ_1 wirken die beiden anderen Hauptspannungen σ_2 und σ_3, wenn jede für sich allein angebracht gedacht wird. Es werde die Richtung von σ_2 zur y-Axe gewählt; dann entsteht eine Dehnung nach der Richtung der y-Axe mit dem Coefficienten ε_y, wobei $\sigma_2 = E\varepsilon_y$ ist, sowie eine Quercontraction mit dem Coefficienten $-\frac{\varepsilon_y}{m}$; schliesslich ergiebt σ_3 nach der Richtung der z-Axe eine Dehnung mit dem Coefficienten ε_z, wobei $\sigma_3 = E\varepsilon_z$ ist, sowie nach den Richtungen der x- und y-Axe Quercontractionen mit dem Coefficienten $-\frac{\varepsilon_z}{m}$.

Beziehungen zwischen Hauptspannungen und Hauptdehnungen.

Wenn die Spannungen σ_1, σ_2 und σ_3 gleichzeitig wirken, so veranlassen sie drei Hauptdehnungen mit den Coefficienten ε_1, ε_2 und ε_3, welche durch Addition der oben gefundenen Dehnungscoefficienten für dieselbe Axe erhalten werden. Demnach sind:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{m}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m}.$$

Drückt man ε_x, ε_y und ε_z durch σ_1, σ_2 und σ_3 aus, so folgt

(25)

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}; \quad E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}; \quad E\varepsilon_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}.$$

Diese Gleichungen stellen die Beziehungen zwischen Deformation und Spannungen in einem Punkte eines isotropen elastischen Körpers dar.

Wenn man die Gleichungen (25) in Bezug auf σ_1, σ_2 und σ_3 auflöst, so erhält man die Werte für die Hauptspannungen, ausgedrückt durch die Hauptdehnungen. Die drei Gleichungen (25) geben zusammen addirt

$$\left(1-\frac{2}{m}\right)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=E(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_2)=Ee,$$

wo e die verhältnismässige Volumenänderung bezeichnet (p. 29). Hieraus folgt weiter

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\frac{m}{m-2}Ee.$$

Nach der ersten Gleichung (25) ist

$$m\sigma_1-(\sigma_2+\sigma_3)=mE\varepsilon_1.$$

Werden diese beiden Gleichungen addirt, so bleibt nur σ_1 und es ergiebt sich

$$\sigma_1=\frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right).$$

Mit Anwendung der Bezeichnung

$$G=\tfrac{1}{2}\frac{m}{m+1}E \tag{26}$$

ist schliesslich

$$\sigma_1=2G\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right),$$

und ebenso

$$\sigma_2=2G\left(\varepsilon_2+\frac{e}{m-2}\right) \tag{27}$$

$$\sigma_3=2G\left(\varepsilon_3+\frac{e}{m-2}\right),$$

mit

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 .$$

Schubelasticitätsmodul.

Die Constante G hat eine besondere Bedeutung, die man in folgender Weise erkennt: Ein kleiner Würfel (Fig. 11) verwandelt sich unter dem gleichzeitigen Einflusse einer normalen Zugspannung σ, welche parallel der Diagonale AC einer Seitenfläche ist und einer ebenso grossen normalen Druckspannung, welche parallel der anderen Diagonale derselben Seitenfläche ist, in ein schiefwinkliges Parallelepiped, welches die Seitenfläche $ABC'D'$ hat. Hierbei vermindert sich der rechte Winkel bei A (und bei C) um den kleinen Betrag

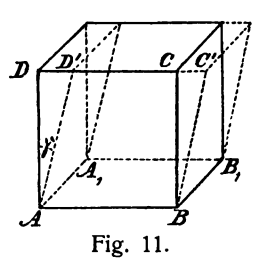


Fig. 11.

$$\gamma = \frac{DD'}{AD},$$

welcher nach p. 26 gleich dem Coefficienten einer Gleitung der zur Seitenfläche ABB_1A_1 parallelen Schichten ist. Andererseits kann dieselbe Gleitung durch Schubspannungen allein zu stande gebracht werden. Denn bei dem dreiseitigen Prisma (Fig. 12) mit der Grundfläche ABO hält eine gewisse Schubspannung τ längs AB Gleichgewicht der Zugspannung σ längs OB und der Druckspannung σ längs AO. Die Grösse von τ findet man, wenn man die Summe der Projectionen aller Kräfte auf BA gleich Null setzt, und zwar ergiebt sich

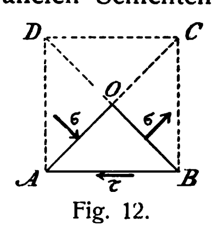


Fig. 12.

$$BA . \tau - OB . \sigma \cos 45^\circ - OA . \sigma \cos 45^\circ = 0 .$$

Da nun

$$OB = OA = AB \cos 45^\circ = AB \frac{\sqrt{2}}{2},$$

so wird

(28) $$\tau = \sigma.$$

Die Figur 13 giebt die Richtungen der auf die Seitenflächen des Würfels wirkenden Schubspannungen an.

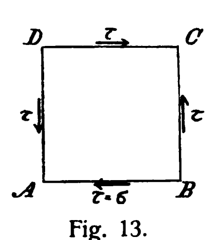


Fig. 13.

Ebenso wie der Elasticitätsmodul E für Zug und Druck als das Verhältnis $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ zwischen der specifischen Normalspannung σ und der entsprechenden Dehnung ε eingeführt worden ist, wird der Schubelasticitätsmodul durch das Verhältnis zwischen der specifischen Schubspannung τ und der entsprechenden Gleitung γ bestimmt:

(29) $$G = \frac{\tau}{\gamma}.$$

Die so definirte Grösse G stimmt, wie jetzt gezeigt werden soll, mit der Grösse G der Gleichung (26) überein.

Bei der durch die normalen Zug- und Druckspannungen σ verursachten Deformation ist die Diagonale AC in AC' übergegangen, wobei

$$AC' = AC\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{m}\right)$$

ist. Gleichzeitig hat sich die Diagonale BD zu BD' verkürzt, so dass

$$BD' = BD\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{m}\right)$$

ist. Aus dem Dreiecke, in welches das Dreieck AOB bei der Deformation sich verwandelt hat, erhält man

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} BD'}{\frac{1}{2} AC'}.$$

Wenn man die für kleine Werte von γ geltende Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

benützt und die obigen Werte der Grössen BD' und AC' einsetzt, so findet man

$$\gamma = 2\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{m}\right) = 2\frac{m+1}{m}\varepsilon .$$

Die Formel (29) ergiebt nunmehr, wenn noch $\tau = \sigma$ eingeführt wird,

$$G = \tfrac{1}{2}\frac{m}{m+1}\frac{\sigma}{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\frac{m}{m+1}E$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (26), w. z. b. w.

Werte von m.

Für die Zahl m, welche das Verhältnis zwischen der Längsdehnung und der Quercontraction darstellt, giebt eine theoretische Betrachtung de Saint-Vénants, welcher eine nicht ganz einwandfreie Annahme zu Grunde liegt, bei isotropen elastischen Körpern den Wert 4. Die Beobachtungen zeigen aber, dass m meistens etwas kleiner ist, und zwar zwischen 3 und 4 liegt, sowie auch von der Beschaffenheit des Materiales abhängt. Bei den Metallen ist m im Mittel gleich $\frac{10}{3}$.

Werten von m, welche zwischen den Grenzen 3 und 4 liegen, entsprechen nach der Formel (26) Werte von G in dem Intervalle von $\frac{3}{8}E$ bis $\frac{2}{5}E$. Mit $m = \frac{10}{3}$ hat man $G = \frac{5}{13}E$.

§ 5.

Verschiedene Arten der Festigkeit.

Weil die Hauptaufgabe der Theorie der Elasticität, d. h. den Deformations- und den Spannungszustand in sämtlichen Punkten eines elastischen Körpers bei gegebenen äusseren Kräften zu bestimmen, nicht allgemein gelöst werden kann, ist man gezwungen, die Lösung dieser Aufgabe in einfacheren speciellen Fällen zu versuchen, wobei die Gestalt des Körpers und die Angriffsweise der äusseren Kräfte massgebend ist.

Stabförmiger Körper.

Im folgenden werden hauptsächlich sog. gerade stabformige Körper betrachtet. Ein gerader stabförmiger Körper entsteht so, dass ein begrenztes und im allgemeinen Falle veränderliches ebenes Flächenstück sich translatorisch derart bewegt, dass sein Schwerpunkt eine Gerade beschreibt, welche die Fläche senkrecht schneidet. Jede Lage der ebenen Figur bildet einen Querschnitt des Stabes; die von dem Schwerpunkte beschriebene Gerade wird die Axe des Stabes genannt. Wenn die ebene Figur, welche sich bewegt, unveränderlich bleibt, so erhält man einen prismatischen stabförmigen Körper.

Bei einem stabförmigen Körper bestimmt man womöglich das Gesetz, nach dem sich die Spannungen in einem und demselben Querschnitte verteilen, und sieht dann nach, wie sie sich von Querschnitt zu Querschnitt verändern. Durch einen Querschnitt F werde der Körper in zwei Teile A und B zerlegt. Auf den Teil A wirken gewisse äussere Kräfte, zu welchen auch etwa vorhandene Reactionen zu zählen sind; auf den Teil B wirkt ebenso ein System von äusseren Kräften, welches bei dem unzerlegten Körper mit dem früheren Systeme im Gleichgewicht sein muss. Bei dem zerlegt gedachten Körper entstehen im Querschnitte entgegengesetzt gerichtete, gleich grosse Spannungen, so dass

die auf A wirkenden Spannungen den A angreifenden äusseren Kräften das Gleichgewicht halten, und ebenso beim Teile B. Das eine der Systeme äusserer Kräfte, z. B. das zu A gehörende, wird das System der äusseren Kräfte für den Querschnitt F genannt.

System äusserer Kräfte für einen Querschnitt.

Das System der äusseren Kräfte für den Querschnitt F werde auf den Schwerpunkt S des Querschnittes reducirt. Dabei ergiebt sich eine Resultirende R und ein resultirendes Kräftepaar, welches durch seine Axe M dargestellt wird (Fig. 14). Die Resultirende R werde ferner

Reduction des Systems äusserer Kräfte für einen Querschnitt.

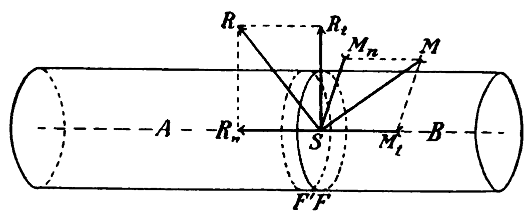


Fig. 14.

in zwei Componenten R_n und R_t zerlegt, von welchen R_n senkrecht zu dem Querschnitte ist und R_t im Querschnitte selbst liegt. Ebenso werde das resultirende Kräftepaar in zwei Kräftepaare zerlegt, so dass das eine mit der Axe M_n in einer zum Querschnitte senkrechten Ebene liegt und das andere mit der Axe M_t sich im Querschnitte selbst befindet.

Auf ein unendlich kurzes, dem Teile A angehörendes Stabstück zwischen den Querschnitten F und F' wirken in F' Spannungen, welche das Kräftesystem R_n, R_t, M_n, M_t bilden, und in F Spannungen, welche dem entgegengesetzten Systeme (R_n), (R_t), (M_n) und (M_t) äquivalent sind, wobei weiter die Voraussetzung getroffen ist, dass das betrachtete kurze Stabstück von keiner äusseren Kraft angegriffen werde. Die axialen Kräfte R_n und (R_n) suchen das Stabstück zu verlängern oder zu verkürzen,

je nachdem sie Zug- oder Druckkräfte sind. Die tangentialen Kräfte R_t und (R_t) bewirken eine Gleitung der Querschnitte F und F' relativ zu einander. Die Kräftepaare M_n und (M_n) bringen eine Drehung von F relativ zu F' in Bezug auf eine der Axe des Kräftepaares parallele Axe zu stande, also eine Biegung des zwischen F' und F liegenden Stabstückes. Die Kräftepaare M_t und (M_t) bewirken schliesslich eine Drehung von F relativ zu F' um eine der Stabaxe parallele Axe.

Einfache Festigkeit.

Bei geraden stabförmigen Körpern, welche als Constructionsteile benützt werden, trifft oft der Fall ein, dass die Systeme der äusseren Kräfte für die verschiedenen Querschnitte sich entweder auf eine Kraft R_n oder auf eine Kraft R_t oder auch ein Kräftepaar M_n oder endlich auf ein Kräftepaar M_t reduciren. Man sagt dann, es werde der Stab auf einfache Festigkeit beansprucht. Folglich giebt es vier Arten einfacher Festigkeit, nämlich:

Zug- und Druckfestigkeit.

1) Festigkeit gegen Zug oder Druck. Das System der äusseren Kräfte für einen Querschnitt giebt in diesem Falle nur eine axiale Kraft R_n.

Schubfestigkeit.

2) Schubfestigkeit. Das System der äusseren Kräfte für einen Querschnitt reducirt sich auf die im Querschnitte liegende Kraft R_t.

Biegungsfestigkeit.

3) Biegungsfestigkeit. Es wird das System der äusseren Kräfte für einen Querschnitt auf ein Kräftepaar M_n zurückgeführt, dessen Ebene die Ebene des Querschnittes senkrecht schneidet.

Torsionsfestigkeit.

4) Torsionsfestigkeit. Das System der äusseren Kräfte für einen Querschnitt liefert nur das im Querschnitte liegende Kräftepaar M_t.

Zusammengesetzte Festigkeit.

Wenn das System der äusseren Kräfte für einen Querschnitt nicht auf eine einzige Kraft R_n oder R_t oder auf ein Kräftepaar M_n oder M_t reducirt werden kann, sondern zwei oder mehr dieser Kräfteelemente sich ergeben, so heisst die Festigkeit zusammengesetz .

Hierbei sind viele Combinationen möglich. Eine besondere Art zusammengesetzter Festigkeit ist die Zerknickungsfestigkeit, welche sich unter dem Einflusse einer relativ grossen Druckkraft ergiebt, indem eine Gefahr der Biegung und Zerknickung des Stabes zugleich vorhanden ist.

Die obige Einteilung giebt die Reihenfolge an, nach welcher die Untersuchung der Festigkeit gerader stabförmiger Körper im folgenden ausgeführt wird.

Zweiter Abschnitt.

Zug- und Druckfestigkeit.

§ 6.

Prismatische Körper.

Zugspannungen. Auf die Endflächen eines prismatischen Stabes (Fig. 15) mögen zwei axiale Zugkräfte P und (P) so wirken, dass

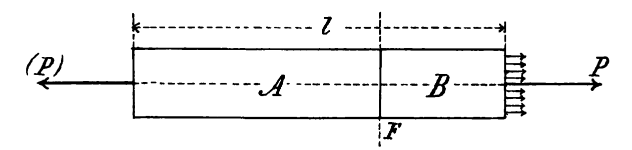


Fig. 15.

sie sich gleichförmig über die Endflächen verteilen. Durch einen Querschnitt werde der Stab in zwei Teile A und B zerlegt, so dass (P) die Resultirende der äusseren Kräfte für den Querschnitt ist (vergl. p. 37). Die auf A wirkenden Spannungen im Querschnitte halten der Kraft (P) das Gleichgewicht und sind mit P äquivalent. Gemäss der einfachsten möglichen Annahme sind die Spannungen im Querschnitte Normalspannungen und verteilen sich gleichmässig über den ganzen Querschnitt. Mit dieser Annahme folgt die specifische Zugspannung

$$(30) \qquad \sigma = \frac{P}{F},$$

wo F den Flächeninhalt des Querschnittes bezeichnet.

Der Stab wird in allen seinen Punkten in gleicher Weise angestrengt.

Tragmodul und Zugfestigkeit.

Wenn die Grösse der Kraft P allmählich von Null an wächst, so wächst auch die Spannung von Null an. Bei einer gewissen Belastung wird die Elasticitätsgrenze des Materiales erreicht (siehe p. 2); der zugehörige Wert von σ, der mit k' bezeichnet werde, heisst Zugspannung an der Elasticitätsgrenze, auch Tragmodul für Zug. Wenn die Kräfte P und (P) weiter wachsen, so zerbricht entweder der Stab bei einer gewissen Grösse von P oder beginnt, wenn eine sog. Fliessgrenze vorhanden ist, sich verhältnismässig stark auszudehnen, auch wenn man P nicht vergrössert oder sogar etwas verkleinert. Dem grössten Werte von P entspricht eine gewisse Spannung K', welche Zugfestigkeit des Materiales heisst. Mit der Streckung des Stabes ist eine Querschnittverminderung verbunden (vergl. p. 31), und wenn ein Fliessen eintritt, zeigt sich eine Einschnürung an einer oder mehreren Stellen. Die Grössen k' und K', welche mittels Materialprüfungsmaschinen experimentell bestimmt werden, beziehen sich immer auf den ursprünglichen Querschnitt. Sie sind auch nicht absolut unabhängig von der Form des Querschnittes und der Länge des Stabes. (Siehe: „C. Bach, Elasticität und Festigkeit“.)

Druck.

Die Gleichung (30) für die innere Spannung gilt auch, wenn die Kräfte P und (P) statt eines Zuges einen Druck auf den Stab ausüben, vorausgesetzt, dass keine Knickgefahr vorhanden ist, wozu erforderlich ist, dass die Länge nicht allzu gross im Verhältnis zu den Querdimensionen sei. Die nähere Bestimmung der Grenze zwischen Druck- und Zerknickungsfestigkeit gehört zur Lehre der Zerknickungsfestigkeit.

Druckfestigkeit.

Wenn die Druckkräfte P und (P) allmählich von Null an wachsen, so wächst auch die specifische Druckspannung von Null an. Bei der Elasticitätsgrenze wird ein gewisser Wert k'', die Druckspannung an der

Elasticitätsgrenze, erreicht, und beim Zerdrücken des Stabes oder unmittelbar vorher herrscht eine specifische Spannung K'', die sog. Druckfestigkeit. Wie k' und K' werden k'' und K'' experimentell ermittelt. Wenn k' und k'' oder K' und K'' einander gleich sind, werden im folgenden die einfacheren Bezeichnungen k und K gebraucht. Die Werte einiger dieser Grössen bei öfters vorkommenden Materialien sind in der Tabelle auf p. 48 zusammengestellt, wobei die Einheit $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ist.

Zulässige Beanspruchung. Sicherheitscoefficient.

Wie auf p. 6 hervorgehoben, darf die specifische Spannung in einem ausgeführten Constructionsteile in Wirklichkeit nicht die Spannung k' oder k'' an der Elasticitätsgrenze überschreiten, wenn der Constructionsteil sich nicht im Gleichgewichte, sondern z. B. in einem schwingenden Zustande befindet. Hierzu ist erforderlich, dass die Spannung in dem Gleichgewichtszustande einen gewissen kleineren Wert als k' oder k'' nicht überschreitet, welcher zulässige Spannung genannt wird und der Berechnung zu Grunde gelegt wird. Bei der Wahl der zulässigen Spannung hat man noch zu beachten, dass die idealen Voraussetzungen, welche bei der Ableitung der Formeln gemacht werden, in der Wirklichkeit nie genau erfüllt sind. Die zulässige Zugspannung werde mit s', die zulässige Druckspannung mit s'' bezeichnet; oder einfach mit s, wenn beide gleich sind. Da die Berechnung von s nach dem vorhin genannten Princip nur ausnahmsweise ausführbar scheint, begnügt man sich bei den Anwendungen mit empirisch bestimmten Werten von s. Meistens bringt man s in Beziehung zu k oder noch öfter zu K, indem man

$$s = \frac{k}{m}$$

oder

$$s = \frac{K}{n}$$

setzt, wobei m und n ($n > m > 1$) sog. Sicherheitscoefficienten sind, und zwar m die Tragsicherheit, n die Bruchsicherheit.

Beispielsweise ist beim schmiedbaren Eisen, mit $k = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und $K = 3800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, bei doppelter Tragsicherheit ($m = 2$) $s = \frac{1600}{2} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und bei fünffacher Sicherheit gegen Bruch ($n = 5$) $s = \frac{3800}{5} = 760 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Zur Bestimmung derjenigen Belastung, durch welche ein prismatischer Stab von gegebenem Querschnitte angestrengt werden darf, führt man in der Gleichung (30) statt σ die zulässige Spannung s ein (s' bei Zug-, s'' bei Druckbeanspruchung) und erhält dann die zulässige Belastung

$$P = Fs. \tag{31}$$

Dimensionirung.

Zur Berechnung des Querschnittes bei gegebener Belastung (Dimensionirung) benützt man die Gleichung

$$F = \frac{P}{s}. \tag{32}$$

Längenänderung.

Ausser der inneren Spannung des prismatischen Stabes kommt seine Längenänderung in Betracht. Es sei l die Stablänge, λ die Verlängerung oder Verkürzung; dann ist die Längsdehnung ε in einem beliebigen Punkte des Stabes

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}.$$

Nach p. 30 gilt unterhalb der Proportionalitätsgrenze die Gleichung

$$\sigma = E\varepsilon,$$

wo E der Elasticitätsmodul für Zug und Druck ist. Aus der Gleichung (30) folgt jetzt

$$\lambda = \frac{Pl}{EF}. \tag{33}$$

Gesetze von Hooke.

Diese Gleichung wurde im Jahre 1678 von Hooke aufgestellt und wird nach ihm benannt; sie lehrt uns folgendes:

1) *Die Längenänderung ist proportional der ursprünglichen Länge des Stabes.*

2) *Die Längenänderung ist proportional der Grösse der belastenden Kräfte.*

3) *Die Längenänderung ist umgekehrt proportional dem Flächeninhalte des Querschnittes.*

4) *Die Längenänderung hängt selbstverständlich noch vom Material des Stabes ab.* Diese Abhängigkeit kommt durch E zum Ausdruck.

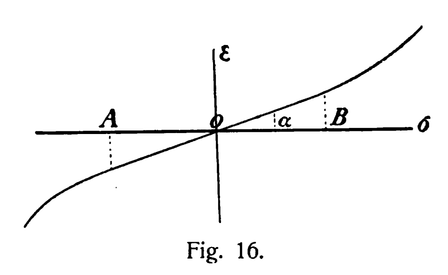


Fig. 16.

Wenn man in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme die specifische Spannung als Abscisse und die Dehnung als Ordinate abträgt (Fig. 16), so erhält man eine Diagrammlinie, welche in der Nähe des Coordinatenanfangspunktes ein fast geradliniges Stück aufweist. *Der Elasticitätsmodul E ist gleich der Cotangente desjenigen Winkels α, welchen die Tangente der Diagrammlinie im Coordinatenanfangspunkte mit der σ-Axe einschliesst.*

$$E = \cot \alpha.$$

Zu bemerken ist jedoch, dass es Körper wie z. B. Gusseisen giebt, bei welchen Proportionalität zwischen Span-

nung und Dehnung gemäss der Formel $\sigma = E\varepsilon$ auch für kleine Spannungen nicht stattfindet (vergl. auch p. 30).

Nach der Gleichung (33) hat man innerhalb des genannten Proportionalitätsgebietes zur Bestimmung des Elasticitätsmoduls

$$E = \frac{Pl}{F\lambda}, \tag{34}$$

wo bei einem gegebenen Stabe und gegebener Belastung der experimentell gefundene Wert λ einzuführen ist. Die Einheit des Elasticitätsmoduls ist dieselbe wie für eine specifische Spannung. Die Tabelle auf p. 48 enthält die Werte von E für eine Reihe von Materialien.

Bei einem 2 m langen Stabe aus Schmiedeisen mit quadratischem Querschnitte von der Seitenlänge 2 cm ist eine Verlängerung 0.75 mm beobachtet worden, wenn die Belastung 3000 kg betrug. Hieraus folgt für den Elasticitätsmodul E

$$E = \frac{3000 \, . \, 200}{2 \, . \, 2 \, . \, 0.075} = 2000000 \, \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Gleichzeitig war die innere Spannung des Stabes

$$\sigma = \frac{3000}{2.2} = 750 \, \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Einfluss des eigenen Gewichtes.

In den beiden Hauptformeln (30) und (33) für die Spannung und die Längenänderung eines geraden prismatischen Stabes bei Zug- oder Druckbeanspruchung ist das Eigengewicht des Stabes nicht mit in Betracht gezogen worden. Wenn der Stab eine bedeutende Länge hat und seine Axe vertical ist, so übt jedoch das eigene Gewicht einen, wenn auch meistens ziemlich kleinen Einfluss aus, der jetzt berechnet werden soll.

1) *Spannung.*

Ein verticaler Stab vom Gewichte G sei am oberen Ende eingespannt und am unteren Ende durch das Gewicht P belastet (Fig. 17). Durch einen horizontalen Schnitt in dem Abstande x vom unteren Ende werde ein Stück des Stabes vom Gewichte $G_x = \frac{x}{l} G$ abgeschnitten;

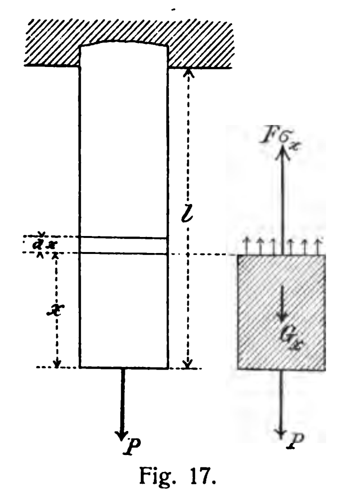


Fig. 17.

auf dieses Stück wirken die Belastung P und die Spannungen in der Schnittfläche. Wird die specifische Spannung im Querschitte mit σ_x bezeichnet, so ist die Resultirende sämtlicher Spannungen $F\sigma_x$. Es folgt also

$$F\sigma_x = P + G_x = P + \frac{x}{l} G$$

oder

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \frac{x}{l}\frac{G}{F}. \tag{35}$$

In dieser Gleichung giebt das zweite Glied rechts den Einfluss des eigenen Gewichtes auf die innere Spannung an. Diese Spannung ist am grössten in dem Einspannungsquerschnitte, welcher deshalb g e f ä h r l i c h e r Q u e r s c h n i t t genannt wird. Sie hat den Wert

$$\frac{P + G}{F}. \tag{36}$$

Beim Dimensioniren ist diese Spannung gleich der zulässigen Spannung s zu setzen.

Wenn man $G = Fl\gamma$ einführt, wobei γ das specifische Gewicht des Materiales ist, so wird

$$s = \frac{P}{F} + l\gamma$$

und

$$F = \frac{P}{s - l\gamma}. \tag{37}$$

Dieselben Formeln gelten für einen Pfeiler, welcher ausser dem eigenen Gewichte eine Druckbelastung auf

dem Kopfende trägt. Die grösste Druckspannung kommt im Fusse des Pfeilers vor.

2) *Verlängerung.*

Zur Berechnung der Verlängerung des in der Figur 17 dargestellten Stabes wendet man zuerst die Gleichung (33) auf ein unendlich kurzes Stück von der Länge dx an, welches sich im Abstande x vom unteren Ende befindet, und ersetzt dabei P durch $P + G_x$. Dieses Stück erleidet die Verlängerung

$$\frac{(P + G_x)\,dx}{EF} = \frac{(P + \frac{x}{l}\,G)\,dx}{EF}.$$

Die ganze Verlängerung λ des Stabes ergiebt sich aus der Gleichung

$$\lambda = \int_0^l \frac{P + G_x}{EF}\,dx = \frac{(P + \frac{1}{2}\,G)\,l}{EF}. \tag{38}$$

Nach (33) ist sie ebenso gross, als ob der Stab gewichtslos wäre und am unteren Ende mit P und der Hälfte des wirklichen Gewichtes belastet wäre. Ähnliches gilt für einen auf Druck beanspruchten Pfeiler.

Elasticitäts- und Festigkeits-Coefficienten. [1]

Einheit $= \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

	Material.	Elasticitäts-modul. Für Zug und Druck E	Elasticitäts-modul. Für Schub G	Spannung an der Elast. grenze. Zug k'	Spannung an der Elast. grenze. Druck k''	Ruhende Bruchbelastung. Zug K'	Ruhende Bruchbelastung. Druck K''	Ruhende Bruchbelastung. Schub K'''
Eisen.	Schweiss- Stabeisen	2000000	770000	1600	1600	3800	3800	3500
	— Eisenblech ‖ [2]	2000000	770000	—	—	3300	—	2400
	— Draht	2000000	—	—	—	6500	—	—
	Gusseisen (gewöhnl.)	1000000	400000	—	—	1250	7500	1500
Stahl.	Bessemerstahl	2150000	860000	3000	3000	5500	—	4000
	Stahlguss	2150000	860000	4500	4500	7500	—	—
Metalle.	Kupferblech, gehämmert	1110000	440000	1400	1400	3000	7000	—
	Messing, gegossen	640000	240000	—	—	1200-1500	730	—
	Blei, weich	50000	18750	80	—	—	150	—
Glas	Glas	700000	—	—	—	250	—	—
Holz.	Eichenholz ‖ [2]	117000	8000	—	—	1100	660	79
	Eichenholz ⊥	—	—	—	—	50	350	—
	Kiefernholz ‖	120000	7000	—	—	1130	450	42
	Kiefernholz ⊥	—	—	—	—	48	220	—
Steine.	Granit	—	—	—	—	—	600—2000	—
	Kalkstein	—	—	—	—	—	500—1500	—
	Ziegelstein, gut	—	—	—	—	80	100	—
	Ziegelstein, gewöhn.	—	—	—	—	—	60	—
	Cementmörtel	—	—	—	—	18	150	—
	Kalkmörtel	—	—	—	—	—	30	—
	Lederriemen	—	—	160	—	290	—	—
	Hanfseil	—	—	—	—	500	—	—

[1] Die Zahlen der Tabellen sind meistens dem Handbuch »Hütte« entlehnt. Weil sie allgemeine Mittelwerte sind, können bei einzelnen Baustoffen bedeutende Abweichungen von ihnen stattfinden.

[2] ‖ bezeichnet bei Blech die Walzrichtung, bei Holz die Faserrichtung, ⊥ die zu diesen senkrechte Richtung.

Anwendungen.

1) Der Zugbaum eines Dachstuhles hat eine Kraft von 8000 kg aufzunehmen und ist aus Rundeisen verfertigt. Welchen Durchmesser d erhält die Stange und wie gross ist die Verlängerung?

Mit 5-facher Bruchsicherheit hat man $s = 760 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Aus der Gleichung (32) folgt:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{8000}{760},$$

somit

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 8000}{\pi \,.\, 760}} = 3.66 \text{ cm}.$$

$$d \backsim 3.7 \text{ cm.}$$ [1]

Die Verlängerung ist nach (33)

$$\lambda = \frac{8000 \,.\, 760}{2 \,.\, 10^6 \,.\, 8000}\, l = 0.00038\, l$$

oder 0.38 mm pro laufenden m.

2) Welche Breite erfordert ein 5 mm dicker Lederriemen einer Transmission, wenn die übertragene Kraft 150 kg beträgt (Fig. 18)?

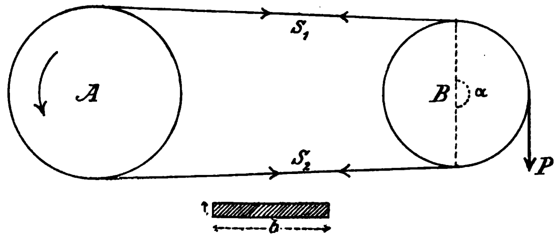


Fig. 18.

Es bezeichnet hier $P = 150$ kg den auf den Umfang der Lastscheibe reducirten Widerstand. Nach den Formeln in § 101, I ist die Spannung in dem stärker gespannten Riementeile bei der Grenze des Gleitens

$$S_1 = \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} P.$$

[1] Das Zeichen $\backsim$ soll „ungefähr gleich“ bedeuten.

Für lederne Riemen auf gusseisernen Scheiben ist im Mittel $f = 0.28$. Setzt man noch, der Annahme gleicher Scheibendurchmesser entsprechend,

$$\alpha = \pi = 3.14,$$

so folgt

$$S_1 = \frac{e^{3.14 \times 0.28}}{e^{3.14 \times 0.28} - 1} \, 150 = 256 \text{ kg}.$$

In Wirklichkeit muss der Riemen noch stärker gespannt sein, wenn man der Gleitgefahr vorbeugen will. Wählt man z. B.

$$S_1 = 350 \text{ kg},$$

so ergiebt sich gemäss der Gleichung (30) bei 10-facher Sicherheit gegen Zerreissen die Querschnittsfläche des Riemens

$$F = 0.5\, b = \frac{350}{\frac{1}{10} 290}$$

und

$$b = \frac{350}{0.5 \,.\, 29} = 24.1 \text{ cm},$$

$$b \backsim 24 \text{ cm}.$$

3) Der quadratische Sockel einer Säule, welche 50 t (einschliesslich des eigenen Gewichtes) zu tragen hat, soll berechnet werden. Welches ist die kleinste zulässige Länge l der Seite des Quadrates, bei 10-facher Sicherheit gegen Zerquetschen, wenn der Baustoff *a*) Granit und *b*) Ziegelstein ist?

a) Als zulässige Druckbeanspruchung werde

$$s = \frac{600}{10} = 60 \, \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

angenommen. Dabei ergiebt sich die Grundfläche des Sockels

$$l^2 = \frac{50000}{60},$$

woraus

$$l = \sqrt{\frac{5000}{6}} = 28.9 \text{ cm},$$

$$l \backsim 29 \text{ cm}$$

folgt.

b) Die zulässige Druckbeanspruchung des Mörtels ist bei demselben Sicherheitsgrade

$$s = \frac{30}{10} = 3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

und man findet die erforderliche Sockelfläche

$$l^2 = \frac{50000}{3},$$

d. h.

$$l = \sqrt{\frac{50000}{3}} = 129 \text{ cm},$$

$$l \backsim 1.3 \text{ m}.$$

4) Aus wie vielen Drähten von $d = 2.2$ mm Durchmesser muss ein Drahtseil zusammengesetzt werden, wenn es zur Hinaufbeförderung der Maximallast $P = 7000$ kg aus einem 180 m tiefen Schachte gebraucht werden soll? $\left(s = 1900 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$.

Wenn die Anzahl der Drähte n ist, so hat man

$$F = n \frac{\pi d^2}{4}.$$

Nach der Gleichung (37), welche hier angewendet wird, folgt

$$F = n \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{s - l\gamma}$$

und also

$$n = \frac{4P}{\pi d^2 (s - l\gamma)}$$

oder

$$n = \frac{4 \,.\, 7000}{\pi \, 0.22^2 (1900 - 141)} = 105.$$

Das Seil wird aus 108 Drähten in 6 Litzen mit je 18 Drähten hergestellt; sein Durchmesser ist 34 mm und das Gewicht pro lauf. m beträgt 3.9 kg.

5) Wie hoch kann eine unbelastete Ziegelmauer bei 10-facher Sicherheit gegen Zerdrücken gebaut werden?

Wenn die Grundfläche der Mauer F, ihre Höhe h ist und das specifische Gewicht der Ziegel $\gamma = 1.6 \frac{\text{kg}}{\text{decm}^3}$ beträgt, so ist der gesamte Druck in der untersten Schicht

$$P = Fh\gamma = Fs.$$

Wählt man für den Mörtel $s = 3\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, so folgt

$$h = \frac{s}{\gamma} = \frac{3\,.\,10^3}{1.6} = 1870\ \text{cm},$$

$$h = 18.7\ \text{m}.$$

6) Ein Radreif aus Gussstahl wird auf den Radkranz eines Locomotivrades aufgezogen. Sein ursprünglicher Durchmesser war $d = 894$ mm, und nachher ergab sich $d' = 894.5$ mm. Welche Spannung herrscht im Reife?

Die Gleichung (33) liefert

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{E\lambda}{l} = \frac{E\pi\,(d'-d)}{\pi d} = \frac{2150000 \times 0.05}{89.4},$$

$$\sigma = 1200\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

§ 7.

Nicht prismatische Körper.

Spannung. Auch bei nicht prismatischen Körpern mit einer geraden Axe, in deren Längsrichtung eine Belastung und das eigene Gewicht wirken, nimmt man unter Voraussetzung, dass die Querschnittsabmessungen relativ klein gegen die Länge des Stabes sind, eine gleichmässige Verteilung der Normalspannungen in den einzelnen Querschnitten an. In dem Querschnitte F_x im Abstande x vom unteren Ende des Körpers in der Figur 19 herrscht somit die specifische Spannung

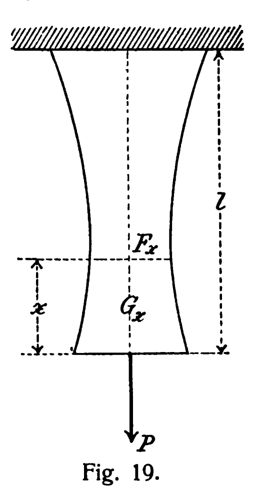


Fig. 19.

$$\sigma_x = \frac{P + G_x}{F_x}, \tag{39}$$

wobei G_x wie vorher das eigene Gewicht des Stückes von der Länge x

bezeichnet. Der gefährliche Querschnitt, in welchem die Spannung am grössten ist, braucht nicht notwendig mit dem Einspannungsquerschnitte zusammenzufallen; er muss in jedem Falle besonders aufgesucht werden; der Körper ist so zu dimensioniren, dass die Inanspruchnahme in dem gefährlichen Querschnitte die zulässige wird.

Längenänderung.

Für die Längenänderung ergiebt sich die allgemeine Formel

$$\lambda = \int_0^l \frac{P + G_x}{EF_x}\, dx. \tag{40}$$

Man kann den Querschnitt F_x des gezogenen oder gedrückten Stabes so bestimmen, dass die Spannung überall dieselbe und gleich der zulässigen Spannung s ist. Nach der Gleichung (39) hat man dabei

$$sF_x = P + G_x\,,$$

woraus durch Differentiation

$$s\, dF_x = dG_x = \gamma F_x\, dx$$

oder

$$\frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma}{s}\, dx$$

folgt. Die Integration ergiebt

$$\ln F_x = \frac{\gamma}{s}\, x + \text{Const.}$$

$$F_x = F_0\, e^{\frac{\gamma}{s} x},$$

wo F_0 die Querschnittsfläche am Ende $x = 0$ bezeichnet. Ihre Grösse ist $\frac{P}{s}$, und die Gleichung wird

$$F_x = \frac{P}{s} e^{\frac{\gamma}{s} x}. \tag{41}$$

Körper von gleicher Festigkeit.

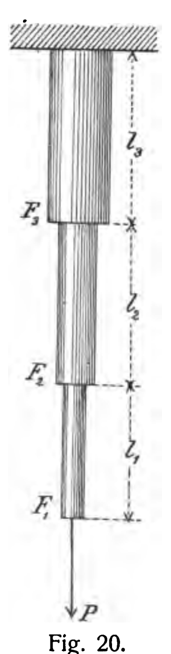


Fig. 20.

Ein Körper, dessen Querschnitt dem Gesetze (41) folgt, heisst Körper von gleicher Zug-, bez. Druckfestigkeit. Solche Körper werden jedoch selten in der genauen Form hergestellt, man begnügt sich meistens mit Formen, welche annähernd gleich stark sind, indem man z. B. den Körper aus konischen oder prismatischen Teilen zusammensetzt. Bei dem in der Figur 20 abgebildeten gezogenen Körper können die Querschnitte der einzelnen prismatischen Stücke so gewählt werden, dass die Spannung am oberen Ende jedes Stückes die zulässige Spannung erreicht. Mit den Bezeichnungen in der Figur findet man so auf Grund der Gleichung (37)

$$F_1 = \frac{P}{s - \gamma l_1},$$

$$F_2 = \frac{P + \gamma F_1 l_1}{s - \gamma l_2} = \frac{sP}{(s - \gamma l_1)(s - \gamma l_2)},$$

$$F_3 = \frac{P + \gamma (F_1 l_1 + F_2 l_2)}{s - \gamma l_3} = \frac{s^2 P}{(s - \gamma l_1)(s - \gamma l_2)(s - \gamma l_3)},$$

. . . .

$$F_n = \frac{s^{n-1} P}{(s - \gamma l_1)(s - \gamma l_2) \ldots (s - \gamma l_n)}. \tag{42}$$

Wenn die prismatischen Stücke alle gleich lang sind, also

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l$$

ist, so folgt aus (42)

$$F_n = \frac{s^{n-1} P}{(s - \gamma l)^n} = \left(\frac{s}{s - \gamma l}\right)^n \frac{P}{s}. \tag{43}$$

Anwendungen.

1) Das Pumpengestänge einer Schachtpumpe besteht aus drei cylindrischen Stücken von je 40 m Länge. Die grösste Belastung beträgt 16 t. Welche Durchmesser der einzelnen Stücke sind erforderlich, wenn das spec. Gewicht des angewendeten Schmiedeisens $\gamma = 7.7$ ist?

Wegen oft wechselnder Belastung wählt man eine relativ hohe Bruchsicherheit. Mit $s = 400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ liegt der Sicherheitscoefficient zwischen 9 und 10. Die Gleichung (43) liefert nun für $n = 1, 2$ und 3 die Querschnittsflächen

$$F_1 = 43.3 \text{ cm}^2,\ F_2 = 47.0 \text{ cm}^2,\ F_3 = 50.9 \text{ cm}^2,$$

mit den entsprechenden Durchmessern

$$d_1 = 7.43 \text{ cm},\ d_2 = 7.73 \text{ cm},\ d_3 = 8.05 \text{ cm}.$$

2) Ein Brückenpfeiler aus Granit ist aus zwei Teilen von je 8 m Höhe zusammengesetzt. Der Durchschnitt des oberen Teiles ist ein Rechteck mit der Langseite $c = 6$ m, des unteren Teiles ein Rechteck mit der gleichen Langseite, an welches sich ein gleichseitiges Dreieck und ein Halbkreis an den Enden anschliessen. Es werden die Breitedimensionen gesucht, wenn die Belastung des Pfeilers 1200 t beträgt.

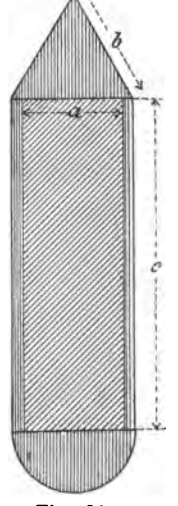


Fig. 21.

Das specifische Gewicht des Granits ist $\gamma = 2.75$. Als zulässige Beanspruchung werde $s = 30 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gewählt. Die Gleichung (37) liefert dann die Fläche F_1 des oberen Rechtecks:

$$F_1 = \frac{1200 \,.\, 10^3}{30 - 800 \times 2.75 \times 10^{-3}} = 600\, a,$$

woraus

$$a = 71.9 \text{ cm}$$

folgt. Für die untere Querschnittsfläche F_2 wird

$$F_2 = \frac{F_1 s}{s - \gamma l} = bc + \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

erhalten; nach Einsetzen der numerischen Werte und Auflösung in Bezug auf b folgt

$$b = 70.7 \text{ cm}.$$

Bei der Ausführung würde $b = a = 72$ cm gewählt.

3) Die Formel (43) liefert durch einen Grenzübergang die beim Körper gleicher Festigkeit geltende Gleichung (41). Wenn man $l = \frac{x}{n}$ setzt, wobei x die Gesamtlänge von n prismatischen Stücken bezeichnet, so folgt

$$F_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{s}\frac{x}{n}\right)^n}\frac{P}{s},$$

und mit Anwendung der bekannten Grenzformel

$$\lim_{(n=\infty)} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = e^u$$

findet man

$$\lim_{(n=\infty)} F_n = F_x = \frac{1}{e^{-\frac{\gamma}{s}x}}\frac{P}{s} = \frac{P}{s}e^{\frac{\gamma}{s}x}.$$

§ 8.

Ubungsaufgaben betreffend die Zug- und Druckfestigkeit.

1) Welche Belastung trägt ein Schmiedeisenstab, dessen Querschnitt ein Quadrat von 2 cm Seitenlänge ist, bei 4-facher Sicherheit gegen Bruch, und welche Belastung ist erforderlich, um den Stab um 0.5 mm zu verlängern, wenn seine Länge 2 m ist?

2) Eine kurze gusseiserne Säule, welche mit 80 t belastet ist, soll bei 10-facher Sicherheit gegen Zerdrücken dimensionirt werden und zwar: *a*) als Hohlcylinder mit dem äusseren Durchmesser 40 cm, *b*) quadratisch mit der Wandstärke 13 mm.

3) Der Deckel eines Dampfcylinders von 75 cm Durchmesser und mit 4 Atm. Überdruck, ist mittels 20 Schrauben befestigt. Welchen Durchmesser erfordern die Schraubenkerne, wenn $s = 300 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gewählt wird?

4) Eine verticale prismatische Säule, welche unten befestigt ist, wird von einer axialen Kraft nach aufwärts gezogen. Wann giebt es einen Querschnitt ohne Spannung und wo liegt er?

5) Wie gross darf die Belastung einer Ziegelmauer von 8 m Höhe sein, wenn die Grundfläche ein Quadrat von 75 cm Seitenlänge ist?

6) Man berechne die Längenänderung eines Körpers von gleicher Festigkeit.

7) Eine steinerne Säule wird in drei Teilen von je 8, 6 und 4 m Höhe aufgeführt, von unten nach oben gerechnet. Die Belastung ist 25 t und die vorgeschriebene Sicherheit gegen Zerdrücken gleich 10. Die Säule soll dimensionirt werden und zwar: *a*) wenn sie aus guten Ziegeln mit entsprechendem Mörtel gebaut ist und quadratischen Querschnitt hat und *b*) wenn der Baustoff Granit und der Querschnitt kreisförmig ist.

Dritter Abschnitt.

Schubfestigkeit.

§ 9.

Bolzen- und Nietverbindungen u. s. w.

Eine Kraft, welche in einem Querschnitte eines stabförmigen Körpers liegt, bringt tangentiale Spannungen in dem Querschnitte hervor, deren Resultirende der Grösse nach gleich der Kraft ist. Im allgemeinen verändern sich die Spannungen nach Richtung und Grösse von einem Punkte des Querschnittes zu einem anderen; man nimmt indessen bei einer grossen Zahl von Constructionen, z. B. bei Verbindungen mittels Bolzen oder Nieten, an, dass die Schubspannungen parallel der wirkenden Kraft seien und sich gleichmässig über den Querschnitt verteilen. In § 17 weiter unten wird das Problem der Schubspannungen in einem Querschnitte einer vollständigeren Behandlung unterzogen.

Ist die abscherende Kraft P, die Querschnittsfläche F und die specifische Tangentialspannung τ, so hat man also

$$\tau = \frac{P}{F}. \tag{44}$$

Spannung. Die zulässige Schubbeanspruchung werde mit t bezeichnet. In Bezug auf die Wahl von t gilt ähnliches, wie oben über die zulässige Zug- und Druckbeanspruchung s gesagt worden. Man nimmt bei einem und dem-

selben Material, besonders bei Metallen, oft t etwas kleiner als s, etwa $t = \frac{4}{5} s$. Zur Dimensionirung eines Querschnittes, in welchem nur Schub vorkommt, ergiebt sich also die Gleichung

$$F = \frac{P}{t}. \tag{45}$$

Anwendungen.

1) Fig. 22 zeigt eine Verbindung, deren sämtliche Teile aus

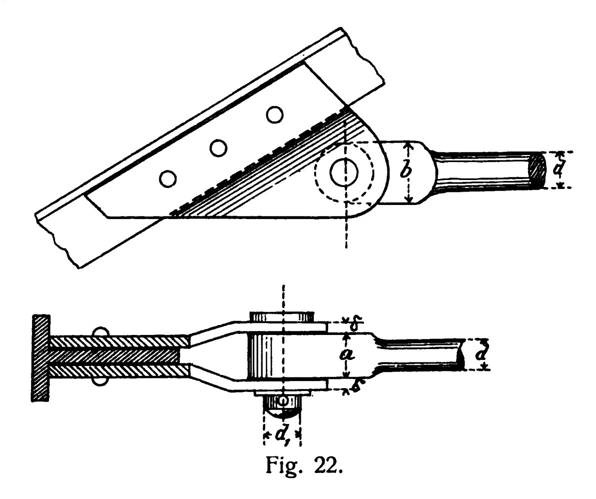


Fig. 22.

Schmiedeisen hergestellt sind. Es sollen alle Dimensionen durch den gegebenen Durchmesser d der Zugstange ausgedrückt werden.

Die Zugstange nimmt eine axiale Kraft $P = \frac{\pi d^2}{4} s$ auf, welche auch den Verbindungsbolzen längs zweier Schnittflächen mit dem Gesamtinhalte $2 \frac{\pi d_1^2}{4}$ abzuscheren sucht. Somit folgt

$$P = 2 \frac{\pi d_1^2}{4} t.$$

Nimmt man $t = \frac{4}{5} s$, so ergiebt der Vergleich der beiden Werte von P den Durchmesser d_1 des Bolzens und zwar

$$d_1 = \sqrt{\tfrac{5}{8}}\, d = 0.791\, d$$

oder

$$d_1 \backsim 0.8\, d.$$

Zwischen dem Verbindungsbolzen und dem Auge der Zugstange sowie zwischen dem Bolzen und den Gabelarmen entstehen Druckspannungen, deren Resultirende gleich der übertragenen Kraft P ist. Es müssen deshalb die Projectionen der Durchschnittsflächen des Bolzens innerhalb des Auges der Zugstange sowie innerhalb der Gabelbleche wenigstens ebenso gross wie die Querschnittsfläche der Zugstange sein. Mit den Bezeichnungen der Figur folgt hieraus

$$a d_1 = \frac{\pi d^2}{4}$$

und

$$a = \frac{\pi}{3.2}\, d \backsim d$$

sowie

$$\delta = \frac{a}{2} = \frac{d}{2}.$$

Endlich erhält man die äussere Breite b des Bolzenauges aus der Gleichung

$$(b - d_1)\, a = \frac{\pi d^2}{4},$$

welche den Wert

$$b \backsim 1.6\, d$$

liefert.

Wenn die Anzahl der d o p p e l s c h n i t t i g e n Nieten, welche die Gabelbleche mit dem Winkeleisen verbinden, gleich n und der Durchmesser der Nieten d_2 ist, so hat man, da für gutes Nieteisen $t = s$ angenommen werden kann,

$$2n \frac{\pi d_2^2}{4}\, t = P = \frac{\pi d^2}{4}\, s,$$

$$n d_2^2 = \tfrac{1}{2}\, d^2,$$

z. B. für $n = 3$

$$d_2 = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, d \backsim 0.4\, d.$$

B e m. Die obigen Dimensionsberechnungen setzen voraus, dass keine erheblichen Biegungsspannungen im Bolzen auftreten. Eine besondere Berechnung auf Biegung muss deshalb immer gleichzeitig ausgeführt werden (Abschn. IV). Die Biegungsgefahr ist um so grösser, je grösser die Länge des Bolzens im Verhältnis zu seinem Durchmesser ist.

Beispielsweise folgt mit $d = 50$ mm, $d_1 = 40$ mm, $a = 50$ mm, $\delta = 25$ mm, $b = 80$ mm, $d_2 = 20$ mm für $n = 3$.

2) In einem Dachsparren aus Föhrenholz wirkt eine Druckkraft P (Fig. 23). Der Sparren ist unten eingelassen. Man bestimme die erforderliche Länge des Stückes x.

Am unteren Ende des Sparrens wirkt eine horizontale Kraft $P \cos \alpha$, welche ein parallelepipedisches Stück des horizontalen Binders herauszuschieben sucht. Dieser Schub verteilt sich auf drei rechteckige Flächen; die Reibung, die in entgegengesetzter Richtung wirkt, werde ausser Betracht gelassen. Mit den Bezeichnungen in der Figur erhält man

$$P \cos \alpha = x\,(b + 2h)\,t$$

und

$$x = \frac{P \cos \alpha}{(b + 2h)\,t}.$$

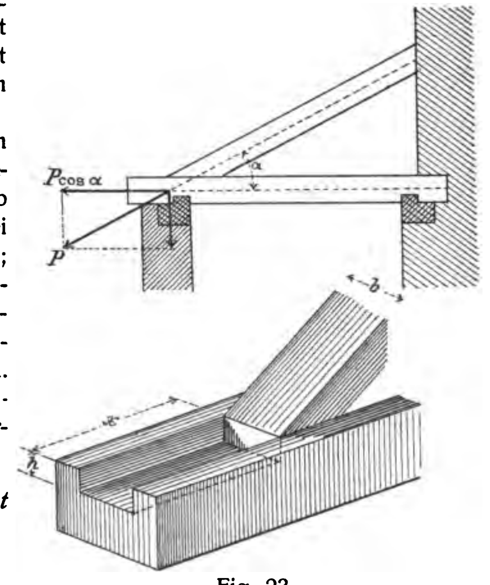


Fig. 23.

Beispielsweise folgt mit $\alpha = 20°$, $P = 6$ t, $b = 16$ cm, $h = 4$ cm, wenn $t = 4$ kg/cm² gewählt wird,

$$x = \frac{6000 \cos 20°}{24.4} = 58.7 \text{ cm},$$

$$x \backsim 60 \text{ cm}.$$

Wünscht man x kleiner zu nehmen, so kann man zur Verbindung einen schmiedeisernen Bolzen anwenden (Fig. 24). Der Bolzen wird auf Schub beansprucht in einem elliptischen Querschnitte mit dem Inhalte

$$\frac{\pi d^2}{4 \sin \beta},$$

wo β der Winkel zwischen dem Bolzen und der Horizontalebene ist. Ist t' die Schubspannung im Bolzen, so wirkt auf ihn eine hori-

zontale Kraft $\frac{\pi d^2}{4 \sin \beta} t'$. Es ist aber die Gefahr einer Abscherung des Bolzens kleiner als die Gefahr, dass das Holzmaterial neben dem Loche des Bolzens zerdrückt werde oder dass ein scheibenförmiges Stück des Sparrens hinausgeschoben werde. Weil sich die Verbindung somit einer strengeren Berechnung entzieht, wählt man den neuen Wert von x nach praktischer Schätzung.

Fig. 24.

3) An einem Knotenpunkte eines Fachwerkträgers wird die in dem 14 mm dicken Zugbande wirkende Kraft $P = 14000$ kg übertragen. Wie viele 22 mm starke Nieten sind hierzu erforderlich und wie breit ist das Zugband zu wählen, alles unter Voraussetzung 5-facher Bruchsicherheit?

Beim Schmiedeisen ist mit $n = 5$ $s = 760$ kg/cm² und bei gutem Nieteisen $t = s$. Jede Niete kann also eine Schubkraft

$$\frac{\pi d^2}{4} t = \frac{\pi}{4} 2.2^2 \times 760 = 2890 \text{ kg}$$

aufnehmen. Zur Aufnahme der ganzen Kraft P sind dann $\frac{14000}{2890} \backsim 5$ einschnittige Nieten erforderlich.

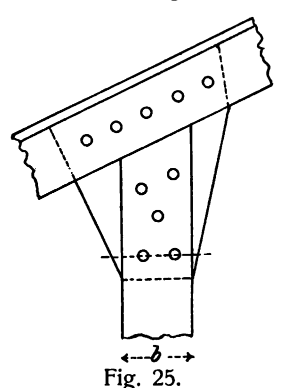


Fig. 25.

Das Zugband bedarf einer effektiven Querschnittsfläche $\frac{14000}{760} = 18.4$ cm². Bei der Anordnung, wie sie Fig. 25 zeigt, ist ein Abzug für die beiden untersten Nieten zu berücksichtigen. Dabei ergiebt sich

$$(b - 4.4)\, 1.4 = 18.4$$

und

$$b = 17.5 \text{ cm}.$$

Nach Fig. 26 hat man nach dem Abzug auf Grund der untersten Niete

$$(b - 2.2)\, 1.4 = 18.4,$$

und $b = 15.3$ cm. Es muss aber noch nachgerechnet werden, ob die Beanspruchung in dem Schnitte durch die beiden vorangehenden Nieten nicht zu gross wird. Auf diesen Schnitt wirkt die Kraft $14000 - 2890 = 11110$ kg, und es folgt für die entsprechende Breite b:

$$(b - 4.4)\,1.4 = \frac{11110}{760},$$

d. i. $\quad b = 14.8$ cm.

Man wählt also definitiv $b = 15.3$ cm.

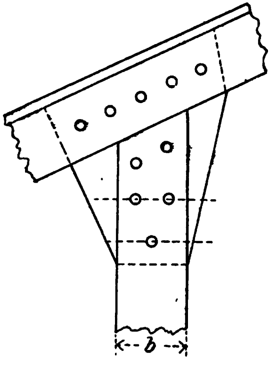


Fig. 26.

4. Nietverbindungen. Es stelle die Fig. 27 eine Überblattung mit einreihiger Nietnaht und einschnittigen, nicht eingesenkten Nieten dar. Jeder Niete entspricht ein Blechstreifen *ABCD* von der Breite *a*, der sog. Nietteilung. Ein solcher Streifen läuft Gefahr folgenderweise zerstört zu werden:

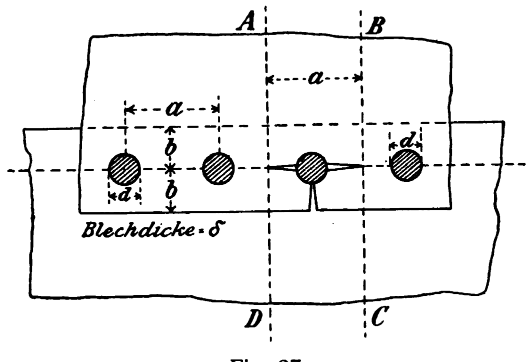


Fig. 27.

1) die Niete wird abgeschnitten,

2) das Blech wird neben der Niete aufgerissen,

3) das Blech wird vor der Niete aufgerissen,

4) von dem Bleche wird ein Stück von der Breite des Nietdurchmessers herausgeschert,

5) die Niete oder die Blechkante am Nietloch wird durch Stauchdruck zerstört.

Damit der Fall 5) nicht eintrete, darf der Nietdurchmesser nicht zu klein im Verhältnis zur Blechdicke sein. Erfahrungsgemäss wählt man zweckmässigerweise

$$d = 6.3\sqrt{\delta}, \tag{46}$$

wobei d und δ in mm ausgedrückt sein müssen. Was ferner die Möglichkeiten einer Zerstörung nach einem der Fälle 1) bis 4) betrifft, so

ist die Nietverbindung am besten construirt, wenn die Gefahr in Bezug auf alle diese Fälle dieselbe ist.

Wenn man die die Niete abscherende Kraft der auf die Blechbreite $a - d$ kommenden Zugkraft gleichsetzt, so erhält man

$$\frac{\pi d^2}{4} t = (a - d)\,\delta\, s,$$

woraus die Nietteilung a folgt. Das Nieteisen ist immer aus besserem Material als das Blech; man kann deshalb $t = s$ oder sogar $t = 1.3\,s$ nehmen. Setzt man ausserdem

$$d = \alpha\delta,$$

wobei α gemäss der Gleichung (46) bestimmt wird, so ergiebt sich

$$\frac{1.3\,\pi d^2}{4} = (a - d)\,\delta = \frac{a - d}{\alpha} d,$$

und weil

$$\frac{1.3\,\pi}{4} \backsim 1,$$

$$d = \frac{1}{\alpha}(a - d)$$

und endlich die Nietteilung

$$a = d\,(1 + \alpha). \tag{47}$$

Die Bedingungen 3) und 4) liefern je einen Wert der Breite b vom Centrum des Nietlochs bis zur Blechkante; der grössere, anzuwendende Wert folgt aus 3), und zwar auf folgende, allerdings nicht ganz einwandfreie Weise: Die auf die Niete wirkende Scherkraft P werde in zwei zu einander senkrechte Componenten P_1 zerlegt (Fig. 28), welche dann nochmals in je zwei zu einander senkrechte Componenten $P_2 = \frac{1}{2} P$ zerlegt werden. Die beiden in die Richtung von P fallenden Kräfte P_2 geben zusammen die Resultirende P, welche auf die Blechbreite $a - d$ aufreissend wirkt; die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte P_2 erzeugen eine Zugspannung innerhalb der Breite b, welche ein Aufreissen des Bleches vor der Niete zu bewirken sucht. Weil

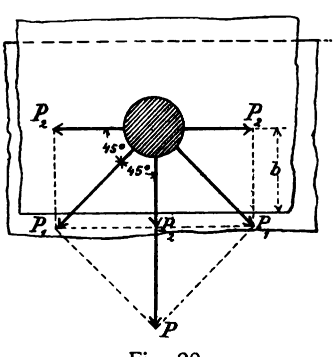


Fig. 28.

$P_2 = \frac{1}{2} P$ ist, folgt $b = \frac{1}{2}(a - d)$. Nimmt man $b = \frac{1}{2} a$, um einer ungleichen Verteilung der Kräfte P_2 auf die Schnittfläche entgegenzuwirken, so folgt nach (47) zur Berechnung der Breite b

$$b = 0.5\, d\,(1 + \alpha). \tag{48}$$

Ähnliche Formeln könnten für andere Arten von Kraftnietungen aufgestellt werden, wie für die Überblattungsnietung mit zwei- oder mehrreihiger Nietnaht und die Laschennietung, mit besonderen Laschen und doppelschnittigen Nieten. Sie sollen jedoch nicht hier behandelt werden, weil die Berechnungen der Nietverbindungen, welche nur auf die abscherenden Kräfte Rücksicht nehmen und die Reibung zwischen den auf einander gepressten Blechen der Verbindung ausser Acht lassen, nicht als völlig befriedigend betrachtet werden können. Die Reibung trägt wesentlich zur Verstärkung der Verbindung bei und wird von einigen Constructeuren als die hauptsächlich zusammenhaltende Kraft betrachtet. Die Festigkeit einer Nietverbindung ist ausserdem in hohem Masse von der Genauigkeit abhängig, mit welcher die Verbindung ausgeführt worden ist.

§ 10.

Übungsaufgaben betreffend die Schubfestigkeit.

1) Vermittelst der in der Figur 29 veranschaulichten Verbindung wird die Zugkraft 18 t übertragen. Die Lamellen bestehen aus 20 mm

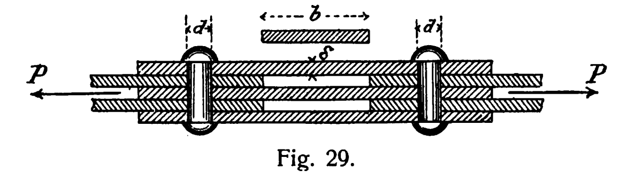


Fig. 29.

dickem Schmiedeisen; die Bolzen sind ebenfalls aus Schmiedeisen hergestellt. Es sollen die Dimensionen b, d und δ bei 6-facher Bruchsicherheit berechnet werden.

2) Durch eine Nietverbindung mit zweischnittigen Nieten wird eine Kraft von 30000 kg übertragen. Die Blechdicke ist 12 mm. Zu berechnen ist die Anzahl der Nieten und die Nietteilung, bei 5-facher Bruchsicherheit.

3) Unter Festigkeitsverhältnis einer Nietverbindung wird das Verhältnis der Stärken des gelochten Bleches und des vollen Bleches verstanden. Es soll für die unter 4) oben betrachtete Niet-

verbindung das Festigkeitsverhältnis durch den Coefficienten α ausgedrückt werden.

4) Welche Kraft ist erforderlich, um mittels eines Stempels ein Loch mit 20 mm Durchmesser in ein 8 mm dickes Blech zu pressen?

5) Auf die Schraube einer Hebewinde wirkt eine maximale Belastung von 15 t. Die Steigung des Gewindes ist 8 mm und die Gänge sind 4 mm breit. Es soll die Höhe der Schraubenmutter berechnet werden, wenn die massive Schraubenspindel 9 cm Durchmesser hat und 8-fache Sicherheit gegen Zerdrücken vorgeschrieben ist.

Vierter Abschnitt.

Biegungsfestigkeit.

§ 11.

Trägheits- und Widerstandsmoment ebener Flächen.

A. Allgemeine Resultate.

In der Lehre von der Biegungsfestigkeit spielen die Trägheits- und Widerstandsmomente der Querschnitte der auf Biegung beanspruchten Balken eine wichtige Rolle, sie sollen deshalb zuerst besonders behandelt werden.

Trägheitsmoment einer ebenen Fläche.

Unter dem Trägheitsmomente einer ebenen Fläche in Bezug auf eine in ihrer Ebene liegende Axe (Fig. 30) *wird die Grösse*

(49) $J = \int x^2 dF$

verstanden, welche entsteht, wenn jedes Flächenelement mit dem Quadrate seiner Entfernung von der betreffenden Axe multiplicirt und die Summe der so erhaltenen Producte gebildet wird. Das Flächenträgheitsmoment stimmt dem numerischen Werte

Fig. 30.

nach mit dem gewöhnlichen Trägheitsmomente (I, zwölfter Abschn.) einer dünnen homogenen Scheibe überein, wenn die Dichte ϱ gleich 1 gesetzt wird. Es ist eine rein geometrische Grösse mit der Einheit: Längeneinh.^{4}, z. B. cm^4, und wird am einfachsten vermittelst eines Integrales berechnet. Zufolge dieser Übereinstimmung gelten die meisten für körperliche Trägheitsmomente gefundenen Regeln unverändert oder mit kleinen Modificationen auch für Flächenträgheitsmomente.

Einheit des Flächenträgheitsmomentes.

In Bezug auf die zu OY senkrechte Axe OX in der Figur 30 ergiebt sich das Trägheitsmoment

$$J_x = \int y^2 \, dF. \tag{49a}$$

Wenn man in der Formel (49) J durch J_y ersetzt und die beiden Gleichungen (49) und (49a) addirt, so findet man:

$$J_x + J_y = \int (x^2 + y^2) \, dF = \int r^2 \, dF = J_0. \tag{50}$$

Polares Trägheitsmoment.

Die Grösse J_0 wird das **polare Trägheitsmoment** der Fläche in Bezug auf den Schnittpunkt O beider Axen (oder auch das Trägheitsmoment in Bezug auf eine zur Fläche senkrechte Axe durch O) genannt.

Bei der Berechnung der Trägheitsmomente einer ebenen Fläche in Bezug auf verschiedene Axen in der Ebene der Fläche kommen zwei wichtige Formeln zur Anwendung, welche mit den entsprechenden Formeln auf den Seiten 619 und 621 in § 107, I für Trägheitsmomente von Körpern übereinstimmen.

Trägheitsmomente in Bezug auf 1) parallele Axen.

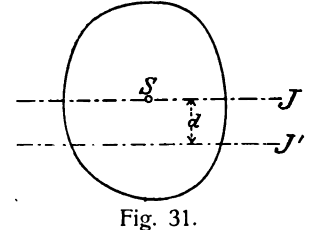


Fig. 31.

Man erhält das Trägheitsmoment einer ebenen Fläche in Bezug auf eine beliebige Axe, wenn man zu dem Trägheitsmomente in Bezug auf die der gegebenen Axe parallele Schwerpunktaxe das Product aus der Fläche und dem Quadrate des Abstandes beider Axen addirt (Fig. 31).

(51) $$J' = J + Fd^2.$$

Die zweite Formel bezieht sich auf die Trägheitsmomente einer Fläche für verschiedene Axen durch denselben Punkt. Bei der Ableitung derselben muss auch das sog. Centrifugalmoment in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Axen betrachtet werden (Fig. 32). *Unter dem Centrifugalmomente in Bezug auf die Axen OX und OY wird die Grösse*

2) Axen durch denselben Punkt.

Centrifugalmoment.

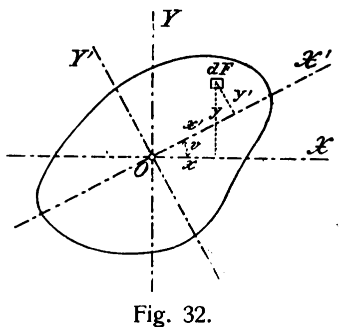


Fig. 32.

(52) $$C = \int xy\, dF$$

verstanden. Bezeichnet man mit x' und y' die Coordinaten eines Flächenelementes für zwei andere zu einander senkrechte Axen durch O, so ist nach Fig. 32

$$\begin{cases} x' = x \cos v + y \sin v, \\ y' = -x \sin v + y \cos v. \end{cases}$$

In Bezug auf die Axen OX' und OY' ergeben sich also die Trägheitsmomente

$$J_x' = \int y'^2 dF = \sin^2 v \int x^2 dF - 2 \sin v \cos v \int xy\, dF + \cos^2 v \int y^2 dF,$$

$$J_y' = \int x'^2 dF = \cos^2 v \int x^2 dF + 2 \sin v \cos v \int xy\, dF + \sin^2 v \int y^2 dF$$

oder

(53) $$\begin{aligned} J_x' &= J_x \cos^2 v + J_y \sin^2 v - 2C \sin v \cos v, \\ J_y' &= J_x \sin^2 v + J_y \cos^2 v + 2C \sin v \cos v. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung geht aus der ersten hervor, wenn man v durch $v + 90°$ ersetzt. Für das Centrifugalmoment C' in Bezug auf die neuen Axen findet man

$$C' = \int x'y'\,dF = \int (x\cos v + y\sin v)(-x\sin v + y\cos v)\,dF =$$

$$(54) \qquad (J_x - J_y)\sin v\cos v + C(\cos^2 v - \sin^2 v) =$$

$$= \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2v + C\cos 2v.$$

Durch Einführung des doppelten Winkels erhält man für J_x' und J_y' die Werte

$$(55) \qquad \begin{aligned} J_x' &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2v - C\sin 2v, \\ J_y' &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2v + C\sin 2v. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung (53) oder (55) und die Gleichung (54) genügen zur Berechnung der Trägheits- und Centrifugalmomente in Bezug auf beliebige Axen, wenn die Trägheitsmomente und das Centrifugalmoment in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Axen gegeben sind. Bei zweckmässiger Wahl dieser Axen vereinfachen sich die Formeln in ähnlicher Weise wie in § 107, I bei Körpern gefunden worden ist.

Hauptaxen und Hauptträgheitsmomente.

Durch Differentiation der ersten Gleichung (55) in Bezug auf v folgt

$$(56) \qquad \frac{dJ_x'}{dv} = -(J_x - J_y)\sin 2v - 2C\cos 2v = -2C'.$$

In Bezug auf die beiden Axen, für welche $C' = 0$ wird, ist also auch

$$\frac{dJ_x'}{dv} = 0,$$

d. h. J_x' ist ein Maximum oder ein Minimum. Für $C' = 0$ wird nach (54)

$$\frac{J_x - J_y}{2}\sin 2v + C\cos 2v = 0,$$

oder

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{2C}{J_y - J_x};$$

diese Gleichung wird von zwei zwischen 0 und π gelegenen, um $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Werten von v erfüllt. Im allgemeinen giebt es somit nur ein Axenkreuz mit den verlangten Eigenschaften. Für die eine der beiden Axen folgt ein grösstes, für die andere ein kleinstes Trägheitsmoment. Diese beiden Trägheitsmomente heissen Hauptträgheitsmomente und die Axen Hauptaxen im Punkte O. Wählt man sie als Coordinatenaxen (Fig. 33) und bezeichnet die beiden Hauptträgheitsmomente mit A und B, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Axe

(57) $$J = A \cos^2 v + B \sin^2 v.$$

Fig. 33.

Ferner ist das Centrifugalmoment C in Bezug auf das neue Axenkreuz

(58) $$C = \frac{A - B}{2} \sin 2v.$$

Trägheitsellipse.

Während die Trägheitsmomente der Körper vermittelst des sog. Trägheitsellipsoides geometrisch dargestellt werden können, erhält man die hier betrachteten Flächenträgheitsmomente aus der sog. Trägheitsellipse. Auf einer Axe durch O werde nach beiden Seiten eine Strecke ϱ abgetragen, welche umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente in Bezug auf diese Axe ist (Fig. 33). Der Endpunkt dieser Strecke erzeugt die Trägheitsellipse. Werden seine Coordinaten in

Bezug auf das System der Hauptaxen mit ξ und η bezeichnet, so ist

$$\cos v = \frac{\xi}{\varrho}, \quad \sin v = \frac{\eta}{\varrho}.$$

Nach Gleichung (57) ist also

$$A\xi^2 + B\eta^2 = J\varrho^2.$$

Der Definition gemäss ist ferner

$$\varrho = \frac{\lambda^2}{\sqrt{J}}, \tag{59}$$

also

$$J\varrho^2 = \lambda^4 = \text{Const.}$$

und man erhält

$$A\xi^2 + B\eta^2 = \lambda^4 \tag{60}$$

als Gleichung der Trägheitsellipse. Dieser Gleichung kann noch die Form

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{B}}\right)^2} = 1$$

gegeben werden. Die Halbaxen der Ellipse sind somit

$$a = \frac{\lambda^2}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{\lambda^2}{\sqrt{B}}. \tag{61}$$

Durch eine Veränderung von λ wird das Axenverhältnis nicht geändert. Man wählt gewöhnlich

$$\lambda^2 = \sqrt{\frac{AB}{F}} \tag{62}$$

und hat dann

$$a = \frac{\lambda^2}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{B}{A}}; \quad b = \frac{\lambda^2}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{F}}. \tag{63}$$

Centralellipse.

Die für den Schwerpunkt der Fläche construirte Trägheitsellipse heisst Centralellipse.

Das Widerstandsmoment einer ebenen Fläche wird immer auf eine bestimmte Schwerpunktaxe bezogen. *Unter dem Widerstandsmomente in Bezug auf eine Axe wird der Quotient aus dem Trägheitsmomente in Bezug auf diese Axe und dem grössten Abstande eines Punktes der Begrenzung von der Axe verstanden:* $W = \frac{J}{e}$ (Fig. 34). Sind die beiden grössten Abstände nicht gleich, so hat man zwei verschiedene Widerstandsmomente $\frac{J}{e'}$ und $\frac{J}{e''}$, unter welchen meistens das kleinere die Hauptrolle spielt. Das Widerstandsmoment einer ebenen Fläche ist eine rein geometrische Grösse, deren Einheit Längeneinh.^{3}, z. B. cm^3 ist.[1]

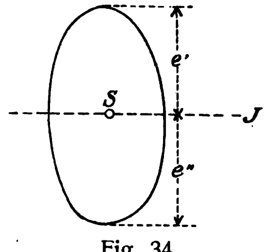


Fig. 34.

B. Berechnung der Trägheits- und Widerstandsmomente.

1) Rechteck, Quadrat.

Rechteck.

Das Trägheitsmoment eines Rechteckes in Bezug auf eine zu einer Kante parallele Schwerpunktaxe ergiebt sich ohne weiteres aus dem auf p. 627, I gefundenen Trägheitsmomente einer rechteckigen Scheibe, indem $\varrho = 1$ gesetzt wird. In Bezug auf die Axe *SX* (Fig. 35) hat man

(64) $$J_x = \tfrac{1}{12}\, bh^3$$

[1] Die Benennung „Widerstandsmoment“ ist nicht gut gewählt, weil sie an ein Kraftmoment erinnert. Besser wäre der von Reuleaux vorgeschlagene Name Querschnittsmodul, der sich aber nicht eingebürgert hat.

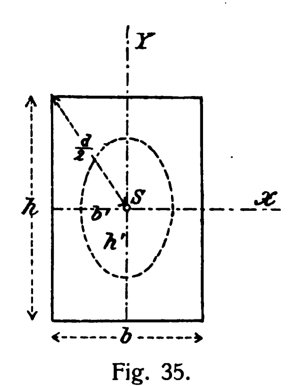


Fig. 35.

und in Bezug auf die Axe SY

$$J_y = \tfrac{1}{12}\,hb^3.$$

Das Widerstandsmoment hinsichtlich der Axe SX ist

$$\frac{J_x}{e} = \tfrac{1}{6}\,bh^2. \tag{65}$$

Die Axen SX und SY enthalten die Hauptaxen der Centralellipse; die beiden Halbmesser sind

$$\text{(66)}\quad \begin{aligned} b' &= \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0.2887\,b, \\ h' &= \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0.2887\,h. \end{aligned}$$

Die Centralellipse ist ähnlich der dem Rechtecke eingeschriebenen Ellipse.

Das polare Trägheitsmoment des Rechteckes in Bezug auf den Mittelpunkt ist

$$J_0 = J_x + J_y = \tfrac{1}{12}\,bh\,(b^2 + h^2) = \tfrac{1}{12}\,bhd^2. \tag{67}$$

Quadrat.

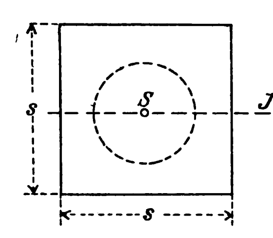


Fig. 36.

Für ein Quadrat mit der Seite s (Fig. 36) hat man

$$\text{(68)}\quad J = \tfrac{1}{12}\,s^4, \qquad \frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\,s^3.$$

Die Centralellipse ist ein Kreis mit dem Radius 0.2887 s. Folglich sind auch sämtliche centralen Trägheitsmomente unter einander gleich. Für ein auf die Kante gelegtes Quadrat (Fig. 37) ergiebt sich das Widerstandsmoment

(69) $$\frac{J}{e} = \frac{\frac{1}{12} s^4}{\frac{1}{\sqrt{2}} s} = \frac{1}{6\sqrt{2}} s^3 = 0.1179\, s^3 .$$

Das polare Trägheitsmoment des Quadrates in Bezug auf den Mittelpunkt ist

(70) $$J_0 = 2J = \tfrac{1}{6} s^4 .$$

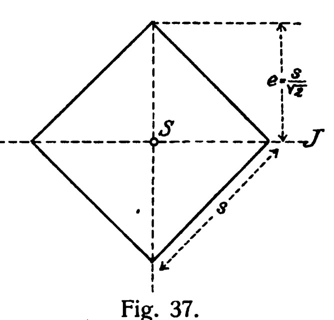


Fig. 37.

2) Dreieck.

Dreieck.

In Bezug auf eine zur Grundlinie b parallele, durch die Spitze des Dreieckes geführte Axe ist das Trägheitsmoment

$$J_1 = \int_0^h y^2 x\, dy = \int_0^h y^2 \frac{y}{h} b\, dy,$$

(71) $$J_1 = \tfrac{1}{4} bh^3 .$$

Mit Hülfe des Satzes über Trägheitsmomente in Bezug auf parallele Axen (p. 68) ergiebt sich ferner das centrale Trägheitsmoment

Fig. 38.

$$J = J_1 - F(\tfrac{2}{3} h)^2 ,$$

d. h.

(72) $$J = \tfrac{1}{36} bh^3 .$$

Schliesslich findet man das Trägheitsmoment J_2 in Bezug auf die Grundlinie des Dreieckes

(73) $$J_2 = J + F(\tfrac{1}{3} h)^2 = \tfrac{1}{12} bh^3 .$$

Das Dreieck hat zwei Widerstandsmomente, und zwar

$$(74) \qquad \frac{J}{e'} = \tfrac{1}{24}\, bh^2 \text{ und } \frac{J}{e''} = \tfrac{1}{12}\, bh^2 .$$

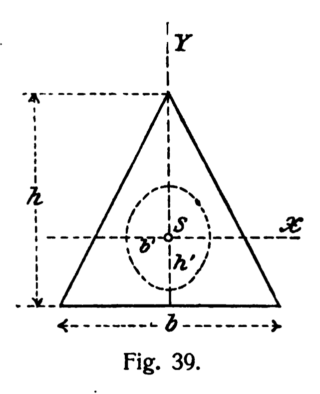


Fig. 39.

Die Hauptträgheitsmomente eines gleichschenkligen Dreieckes (Fig. 39) sind

$$(75) \qquad J_x = \tfrac{1}{36}\, bh^3, \quad J_y = \tfrac{1}{48}\, hb^3,$$

und die Centralellipse hat die Halbaxen

$$b' = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{b}{\sqrt{24}} = 0.2041\, b,$$

$$h' = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \frac{h}{\sqrt{18}} = 0.2357\, h.$$

3) Paralleltrapez.

Paralleltrapez.

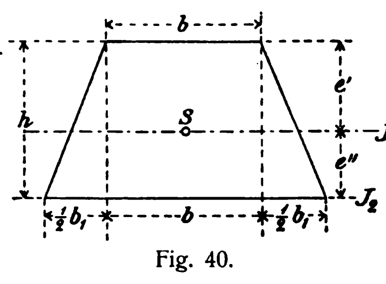


Fig. 40.

Das symmetrische Paralleltrapez in der Figur 40 kann aus einem Rechtecke und zwei Dreiecken zusammengesetzt gedacht werden. In Bezug auf die längere Grundlinie erhält man das Trägheitsmoment

$$J_2 = \tfrac{1}{3}\, bh^3 + \tfrac{1}{12}\, b_1 h^3 = \frac{4b + b_1}{12}\, h^3 .$$

Nach p. 343, I ist der Abstand des Schwerpunktes von der längeren Grundlinie

$$e'' = \frac{3b + b_1}{2b + b_1} \frac{h}{3} .$$

Hieraus folgt für das centrale Trägheitsmoment J

$$(76) \qquad J = J_2 - Fe''^2 = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36\,(2b + b_1)}\,h^3.$$

Für die beiden Widerstandsmomente ergeben sich die Ausdrücke

$$(77) \qquad \begin{aligned} \frac{J}{e'} &= \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12\,(3b + 2b_1)}\,h^2, \\ \frac{J}{e''} &= \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12\,(3b + b_1)}\,h^2. \end{aligned}$$

4) Kreis und Kreisring. Halbkreis.

Kreis.

Das Trägheitsmoment eines Kreises in Bezug auf einen Durchmesser folgt aus dem auf p. 625, I gefundenen Trägheitsmomente einer Kreisscheibe, wenn $\varrho = 1$ gesetzt wird. Es ist somit

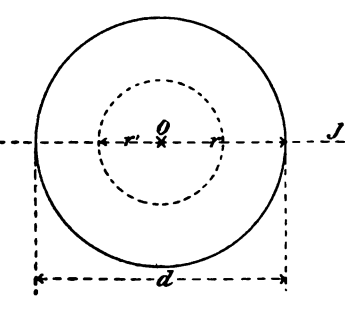


Fig. 41.

$$(78) \qquad J = \frac{\pi}{64}\,d^4 = \frac{\pi}{4}\,r^4 = 0.0491\,d^4 = 0.7854\,r^4.$$

Das Widerstandsmoment ist

$$(79) \qquad \frac{J}{e} = \frac{\pi}{32}\,d^3 = \frac{\pi}{4}\,r^3 = 0.0982\,d^3 = 0.7854\,r^3.$$

Der Centralkreis, welcher die Centralellipse vertritt, hat den Radius

$$r' = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{r}{2}.$$

Das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises ist

(80) $$J_0 = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{2} r^4 = 0.0982\, d^4 = 1.5708\, r^4 .$$

Kreisring.

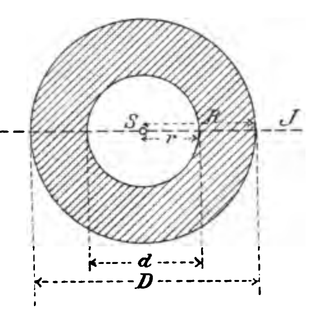


Fig. 42.

Für einen Kreisring ergiebt sich mit den Bezeichnungen in der Figur 42

(81) $$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) .$$

(82) $$\frac{J}{e} = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R} .$$

(83) $$J_0 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) .$$

Halbkreis.

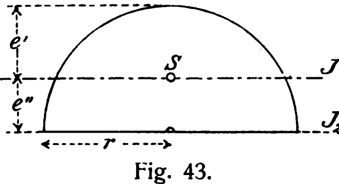


Fig. 43.

Beim Halbkreise (Fig. 43) wird

$$J_2 = \frac{\pi}{8} r^4 .$$

$$J = J_2 - F e''^2 = \frac{\pi}{8} r^4 - \frac{\pi}{2} r^2 \left(\frac{4}{3\pi} r\right)^2 .$$

(84) $$J = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 = 0.1098\, r^4 ,$$

(85) $$\frac{J}{e'} = 0.1907\, r^3 ; \; \frac{J}{e''} = 0.2586\, r^3 .$$

5) Zusammengesetzte Formen.

Bei einer grossen Zahl zusammengesetzter Querschnittsformen kann das Trägheitsmoment auf das Trägheitsmoment eines Rechteckes zurückgeführt werden. Die Träg-

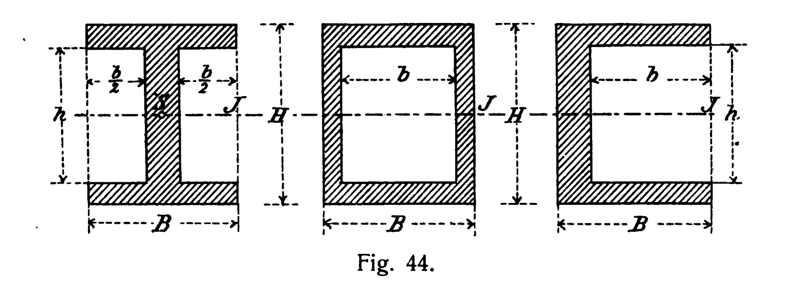


Fig. 44.

heitsmomente der in der Figur 44 dargestellten Querschnitte z. B. lassen sich als die Differenz der Trägheitsmomente zweier Rechtecke auffassen. Es ist

$$J = \tfrac{1}{12}(BH^3 - bh^3),$$

(86)
$$\frac{J}{e} = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}.$$

Bei den in der Figur 45 dargestellten Querschnittsformen ist das Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente zweier Rechtecke:

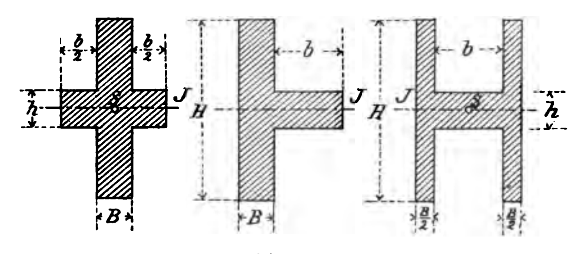


Fig. 45.

$$J = \tfrac{1}{12}(BH^3 + bh^3),$$

(87)
$$\frac{J}{e} = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}.$$

⊥ Querschnitt.

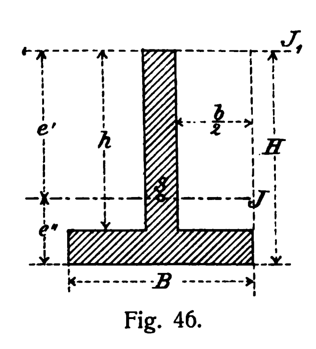


Fig. 46.

Für den ⊥ förmigen Querschnitt (Fig. 46) folgt

$$J_1 = \tfrac{1}{3}(BH^3 - bh^3),$$

$$e' = \tfrac{1}{2}\frac{BH^2 - bh^2}{BH - bh},$$

$$e'' = \tfrac{1}{2}\frac{BH^2 - 2Hbh + bh^2}{BH - bh},$$

(88) $$J = J_1 - Fe'^2 = \frac{B^2H^4 - 2BHbh\{2(H^2 + h^2) - 3Hh\} + b^2h^4}{12(BH - bh)},$$

(89) $$\frac{J}{e'} = \frac{B^2H^4 - 2BHbh\{2(H^2 + h^2) - 3Hh\} + b^2h^4}{6(BH^2 - bh^2)},$$

$$\frac{J}{e''} = \frac{B^2H^4 - 2BHbh\{2(H^2 + h^2) - 3Hh\} + b^2h^4}{6(BH^2 - 2Hbh + bh^2)}.$$

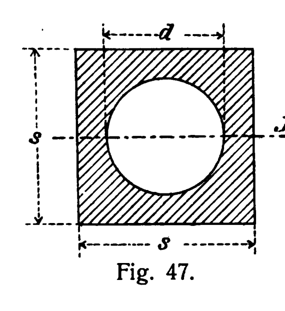


Fig. 47.

Zu dem Querschnitte in der Figur 47, welcher von einem Quadrate gebildet ist, aus dem ein Kreis ausgeschnitten ist, gehört das Trägheitsmoment

(90) $$J = \tfrac{1}{12}\left\{s^4 - \frac{3\pi}{16}d^4\right\} = \tfrac{1}{12}\{s^4 - 0.5890\, d^4\}$$

und das Widerstandsmoment

(91) $$\frac{J}{e} = \frac{1}{6s}\left\{s^4 - \frac{3\pi}{16}d^4\right\}.$$

C. **Graphische Bestimmung des Trägheitsmomentes und der Trägheitsellipse.**

Wenn ein Querschnitt eine verhältnismässig complicirte Form hat, so ist es im allgemeinen bequemer, das

Trägheitsmoment graphisch als analytisch zu ermitteln. Man kann sogar durch Anwendung besonderer Instrumente die Trägheitsmomente direct auf mechanischem Wege bestimmen in ähnlicher Weise wie die Flächeninhalte durch das Planimeter. Von den graphischen Methoden kommen besonders folgende drei in Betracht:

Verfahren von Nehls.

1) Verfahren von Nehls. In der Figur 48 ist OX diejenige Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment der schraffirten Fläche gesucht wird, OY eine beliebige, zur Axe OX senkrechte Axe und LL eine

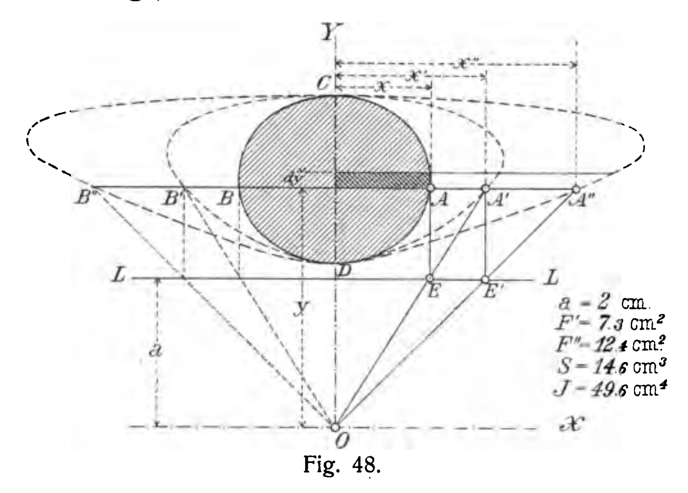


Fig. 48.

Parallele zur Axe OX im Abstande a. Aus der gegebenen Fläche werden nun zwei andere Flächen abgeleitet und zwar in folgender Weise. Von einem Punkte A auf der Begrenzung der Fläche fällt man die Senkrechte AE auf LL; der Strahl OE schneidet auf einer Parallelen zu OX durch A den Punkt A' aus. Von diesem Punkte A' wird dann der Punkt A'' in gleicher Weise abgeleitet wie A' aus A. Das nämliche Verfahren wiederholt man für beliebige andere Punkte B, C u. s. w. des Umfanges der gegebenen Fläche. Der Flächeninhalt derjenigen Figur, auf deren Begrenzung die Punkte A'', B'' u. s. w. liegen, sei

F''. Man kann nun zeigen, dass das Trägheitsmoment der gegebenen Figur in Bezug auf die Axe OX gleich $F''a^2$ ist

$$J = F''a^2. \tag{92}$$

Ein der Axe OX paralleler Streifen mit dem Flächeninhalte xdy liefert das Trägheitsmoment

$$dJ = y^2x\,dy.$$

Aus ähnlichen Dreiecken der Figur ergiebt sich mit den angeführten Bezeichnungen

$$\frac{y}{a} = \frac{x'}{x} = \frac{x''}{x'}.$$

Hieraus folgt

$$x'' = \frac{y^2}{a^2}x.$$

Dem Streifen xdy entspricht das Element der Fläche F''

$$dF'' = x''dy = \frac{y^2}{a^2}x\,dy.$$

Somit ist

$$dJ = y^2\,xdy = a^2\,dF''.$$

Durch Summation für die ganze Fläche folgt endlich

$$J = F''a^2,$$

w. z. b. w.

Speciell ergiebt sich, wenn a gleich der Längeneinheit gewählt wird,

$$J = F''.$$

Bemerkung. Wenn der Flächeninhalt derjenigen Figur, auf deren Begrenzung die Punkte A', B' u. s. w. liegen, mit F' bezeichnet wird, so ist $S = F'a$ das Moment ersten Grades der gegebenen Fläche in Bezug auf die Axe OX.

Verfahren von Culmann.

2) Verfahren von Culmann. Nach dem Verfahren von Nehls ist die Berechnung eines Flächeninhaltes erforderlich. Dies wird bei dem Verfahren von Culmann vermieden; statt dessen ist aber eine etwas



Fig. 49.

umständlichere und genauere Construction notwendig. Die gegebene Fläche wird in Lamellen geteilt, welche parallel der Axe *OX* sind, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht wird; der Flächeninhalt jeder La-

melle wird gemessen und (in irgend einem Massstabe) als eine zu OX parallele Kraft in dem Schwerpunkte der Lamelle abgetragen. Zu diesen Kräften wird ein Seilpolygon I mit der Polweite H des Kräftepolygons construirt. Mit Hülfe dieses Seilpolygons findet man dann, wie in § 57, I gezeigt worden, das statische Moment der gegebenen Fläche in Bezug auf jede zu OX parallele Axe. Die Seilpolygonseiten schneiden auf OX die Strecken $1', 2' \ldots$ ab, welche wieder als Kräfte betrachtet und in den Schwerpunkten der einzelnen Lamellen angebracht gedacht werden. Zu diesen Kräften wird ein neues Seilpolygon II mit der Polweite H' im Kräftepolygone construirt. Dieses Seilpolygon schneidet auf OX die Stücke $1'', 2'' \ldots$ ab; zwischen den äussersten Schnittpunkten liegt eine Strecke z, gleich der Summe aller Stücke $1'', 2'' \ldots$. Es soll jetzt bewiesen werden, dass das Trägheitsmoment der gegebenen Figur in Bezug auf die Axe OX durch

$$J = HH'z \tag{93}$$

gegeben ist. Zu diesem Zwecke wird beispielsweise die Lamelle 2 betrachtet. Ihr Flächeninhalt sei dF, der Abstand ihres Schwerpunktes von OX sei y. Das statische Moment der Lamelle in Bezug auf OX ist dann ydF und das Trägheitsmoment $dJ = y^2 dF$, vorausgesetzt dass die Lamelle so schmal ist, dass man das Trägheitsmoment derselben in Bezug auf ihre zu OX parallele Schwerpunktaxe vernachlässigen kann (vergl. den Satz auf p. 68). Man erhält jetzt

$$ydF = H \cdot \overline{2'}$$

und

$$y \cdot \overline{2'} = H' \cdot \overline{2''}.$$

Hieraus folgt

$$dJ = y^2 dF = HH' \cdot \overline{2''}$$

und

$$J = HH'z,$$

w. z. b. w.

Nimmt man speciell $H =$ der Flächeneinheit, $H' =$ der Längeneinheit, so erhält man

$$J = z.$$

Gewöhnlich verwandelt man die einzelnen Lamellen in Rechtecke mit derselben Grundlinie a und bringt die Höhenlinien als Kräfte an. Die erste Polweite H ist dann eine Länge und man findet

$$J = aHH'z. \tag{93 a}$$

Das Verfahren von Culmann eignet sich besonders, wenn ein centrales Trägheitsmoment gesucht wird, und die Schwerpunktaxe zuerst ermittelt werden muss, was in der That mit Hülfe des ersten Seilpolygons geschieht (Siehe Fig. 49).

Verfahren von Mohr.

3) Verfahren von Mohr. Das Mohr'sche Verfahren unterscheidet sich von dem Culmann'schen dadurch, dass nur das erste Seilpolygon construirt wird, während die Construction des zweiten Seilpolygones durch die Ermittelung der Fläche f ersetzt wird, welche zwischen dem ersten Seilpolygon, seinen äussersten Seiten und dem von diesen Seiten auf OX abgeschnittenen Stücke gelegen ist. Das Trägheitsmoment ist dann

$$J = 2Hf. \tag{94}$$

Der oben betrachteten Lamelle 2 entspricht die Fläche df eines Dreieckes im Seilpolygone I mit der Strecke $2'$ als Grundlinie; es ist also

$$df = \tfrac{1}{2}\,\overline{2'}\,.\,y.$$

Aus dieser Gleichung und

$$ydF = H\,.\,\overline{2'}.$$

ergiebt sich dann

$$dJ = y^2 dF = 2H df$$

und

$$J = 2Hf,$$

w. z. b. w.

Construction der Trägheitsellipse.

Zur graphischen Ermittelung der Trägheitsellipse in einem beliebigen Punkte O eines Querschnittes (Fig. 50) bestimmt man zuerst nach einer der oben dargestellten Methoden die Trägheitsmomente J_x und J_y in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Axen durch O. Ausserdem ist das Centrifugalmoment des Querschnittes in Bezug auf diese Axen erforderlich. Es könnte graphisch direct bestimmt werden; statt dessen soll aber noch ein drittes axiales Trägheitsmoment construirt werden, und zwar das Trägheitsmoment J' in Bezug auf eine Axe, welche den Winkel zwischen den beiden zu J_x und J_y gehörenden Axen halbirt. In der That folgt aus der ersten Gleichung (53) oder (55), wenn $v = 45°$ gewählt wird,

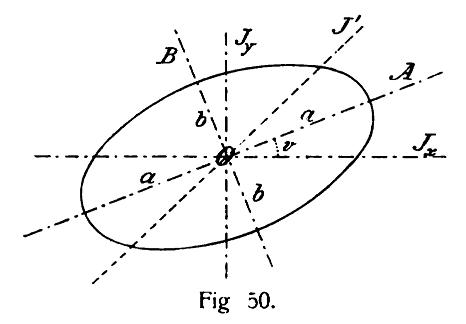


Fig 50.

$$2J' = J_x + J_y - 2C$$

und

$$C = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y) - J'.$$

Nachdem J_x, J_y und C gefunden sind, erhält man die Lage der Hauptaxen der Trägheitsellipse durch Construction der beiden Winkel v_0 und $v_0 + 90°$, welche die auf p. 71 stehende Gleichung

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{2C}{J_y - J_x}$$

erfüllen. Nach der Gleichung (57) hat man weiter

$$J_x = A \cos^2 v_0 + B \sin^2 v_0,$$
$$J_y = A \sin^2 v_0 + B \cos^2 v_0.$$

Zur Bestimmung der Hauptträgheitsmomente A und B benützt man die Gleichungen:

$$A + B = J_x + J_y,$$
$$A - B = \frac{J_x - J_y}{\cos 2v_0} = \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4C^2},$$

woraus A und B ohne weiteres construirt werden können. Schliesslich folgen die halben Längen der Hauptaxen der Ellipse aus den Formeln auf p. 72

$$a = \sqrt{\frac{B}{F}}, \; b = \sqrt{\frac{A}{F}},$$

so dass die Trägheitsellipse nunmehr völlig bestimmt ist.

Eine andere Methode zur Construction der Trägheitsellipse beruht auf einer Eigenschaft ihrer Tangenten. Es sei OJ (Fig. 51) ein beliebiger Durchmesser der Ellipse; man ziehe die beiden diesem Durchmesser parallelen Tangenten, in dem Abstande r vom Mittelpunkte. Bezeichnet v den Winkel zwischen OJ und der Hauptaxe mit dem Trägheitsmomente A, so ist nach (57)

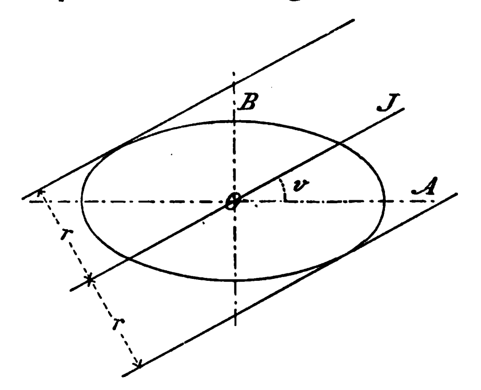


Fig. 51.

$$J = A \cos^2 v + B \sin^2 v = F(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v).$$

Für die beiden Tangenten hat man die Gleichungen

$$x \sin v - y \cos v \pm r = 0,$$

oder auch

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

wo x', y' die Coordinaten eines Berührungspunktes sind. Hieraus folgt

$$\pm \frac{\sin v}{r} = \frac{x'}{a^2}; \mp \frac{\cos v}{r} = \frac{y'}{b^2}$$

und

$$r\frac{x'}{a} = \pm a \sin v; r\frac{y'}{b} = \mp b \cos v,$$

sowie mit Hülfe der Gleichung der Ellipse

$$r^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v.$$

Es ist also das Trägheitsmoment

$$J = Fr^2,$$

Trägheitsradius.

d. h. r ist der Trägheitsradius für die betrachtete Axe (vergl. § 107, I). Nachdem J bestimmt ist, findet man r und damit die beiden Tangenten parallel der angenommenen Axe. Führt man diese Construction für drei verschiedene Axen aus, so ist die Ellipse bestimmt und kann auf Grund bekannter geometrischer Regeln construirt werden.

D. Anwendungen und Übungsaufgaben.

Vorteilhafteste Querschnittsform.

1) *Ein Rechteck wird in einen Kreis eingeschrieben. Wann besitzt das Rechteck ein grösstes centrales Trägheitsmoment und wann ein grösstes Widerstandsmoment?*

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die den Kanten b parallele Schwerpunktaxe (Fig. 52) ist

$$J = \tfrac{1}{12} bh^3 = \tfrac{1}{12} b(d^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

J wird ein Maximum für

$$\frac{d}{db}\left\{ b\,(d^2-b^2)^{\frac{3}{2}} \right\} = 0 .$$

Fig. 52.

Hieraus findet man

$$(d^2-b^2)^{\frac{3}{2}} - 3b^2\,(d^2-b^2)^{\frac{1}{2}} = 0 ,$$

d. h.

$$d^2 - 4b^2 = 0$$

und

$$b = \frac{d}{2}, \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,d . \tag{95}$$

Das maximale Trägheitsmoment hat den Wert

$$\max J = \frac{\sqrt{3}}{64}\,d^4 . \tag{96}$$

Das Widerstandsmoment des Rechteckes ist

$$\frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\,bh^2 = \tfrac{1}{6}\,b\,(d^2-b^2) .$$

Damit die Function $b\,(d^2 - b^2)$ ein Maximum werde, muss

$$d^2 - 3b^2 = 0$$

sein, und also

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}\,d, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}}\,d . \tag{97}$$

Das grösste Widerstandsmoment beträgt

$$\max \frac{J}{e} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\,d^3 . \tag{98}$$

Das Rechteck mit dem grössten Widerstandsmomente wird folgendermassen construirt: Man teilt den Durchmesser des Kreises in drei gleiche Teile (Fig. 53), zieht von einem der Teilungspunkte eine Senkrechte zum Durchmesser und verbindet ihren Schnittpunkt mit dem Kreise mit den beiden Endpunkten des Durchmessers; diese Verbindungslinien sind die beiden Seiten des Rechteckes.

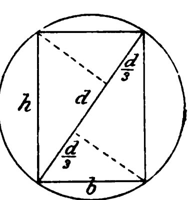


Fig. 53.

In § 12 A unten wird gezeigt, *dass die Stärke oder Tragkraft eines Balkens dem Wider-*

standsmomente des Querschnittes proportional ist und in § 12 B, dass *die Steifigkeit des Balkens proportional dem Trägheitsmomente des Querschnittes ist.* Wünscht man also aus cylindrischen Holzblöcken möglichst starke oder möglichst steife Tragbalken mit rechteckigem Querschnitte herauszuschneiden, so sind Breite und Höhe des Querschnittes nach den oben gefundenen Regeln zu wählen.

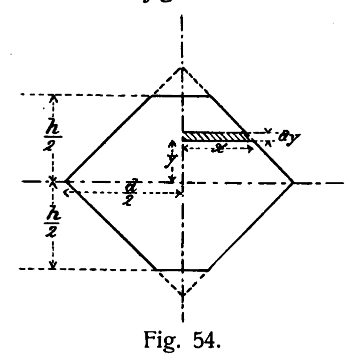


Fig. 54.

2) *Ein Quadrat sei auf die Kante gelegt* (Fig. 54); *oben und unten werden durch horizontale Schnittlinien gleich grosse Stücke weggeschnitten. Wann hat die so entstehende Figur ein grösstes Widerstandsmoment?*

Zur Lösung der Aufgabe wird zuerst das Trägheitsmoment in Bezug auf die horizontale Diagonale berechnet. Mit den Bezeichnungen in der Figur 54 folgt

$$\tfrac{1}{4}\, dJ = y^2 x\, dy$$

und weil

$$x = \frac{d}{2} - y$$

ist,

$$\tfrac{1}{4}\, dJ = y^2 \left(\frac{d}{2} - y\right) dy,$$

also

$$J = 4 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\frac{d}{2} - y\right) dy = \frac{1}{48}\, h^3 (4d - 3h).$$

Das Widerstandsmoment ist mit $e = \frac{h}{2}$

$$\frac{J}{e} = \frac{1}{24}\, h^2 (4d - 3h).$$

Als Bedingung des Maximums folgt hieraus

$$2h(4d - 3h) - 3h^2 = 0$$

oder

$$h = \frac{8}{9}\, d,$$

es ist somit

$$\max \frac{J}{e} = \frac{32}{729} d^3.$$

3) Die Fixpunkte der Centralellipse. In jedem Querschnitte giebt es zwei im allgemeinen nicht zusammenfallende Punkte, in Bezug auf welche die Trägheitsellipse ein Kreis ist und welche also dasselbe Trägheitsmoment in Bezug auf jede Axe durch den Punkt liefern. Diese Punkte N_1 und N_2 (Fig. 55) liegen auf der kleineren Hauptaxe der Centralellipse in dem Abstande $\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Mittelpunkte. Man erkennt nämlich, dass eine durch den Schwerpunkt gehende Hauptaxe in Bezug auf alle ihre Punkte eine Hauptaxe ist, speciell die Axe $N_2\, N_1$ eine Hauptaxe in Bezug auf N_1 und N_2. Ferner findet man, dass das Trägheitsmoment in Bezug auf eine der grösseren Hauptaxe parallele Axe durch einen der Punkte N_1 oder N_2 gleich

Fixpunkte der Central-ellipse.

$$A + F(a^2 - b^2) = Fb^2 + F(a^2 - b^2) = Fa^2$$

ist und somit denselben Wert wie das Trägheitsmoment in Bezug auf die kleinere Hauptaxe der Centralellipse hat. Die beiden Punkte N_1 und N_2 heissen Fixpunkte der Centralellipse; sie bilden mit den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 die Ecken eines Quadrats.

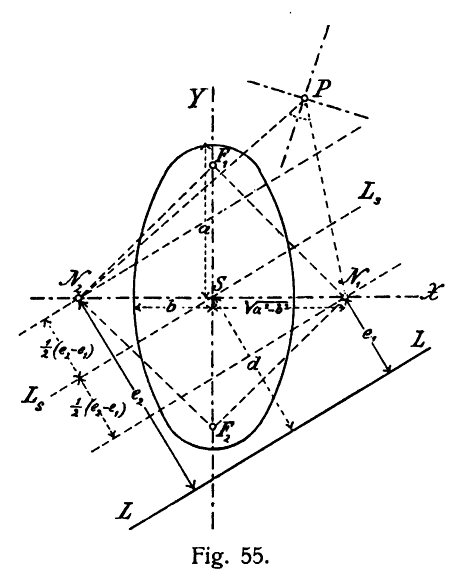


Fig. 55.

Eine beliebige Axe LL in der Ebene der Figur sei durch ihre Abstände e_1 und e_2 von den beiden Fixpunkten bestimmt; es sei das Trägheitsmoment J in Bezug auf diese Axe zu berechnen. Bezeichnet J_0 das centrale Trägheitsmoment in Bezug auf die zu LL parallele Schwerpunktaxe und d den Abstand der beiden Axen, so ist

$$J = J_0 + Fd^2.$$

Nun hat man aber

$$J_0 = Fa^2 - F\left\{\tfrac{1}{2}(e_2 - e_1)\right\}^2,$$

$$d = \tfrac{1}{2}(e_2 + e_1);$$

durch Einsetzung dieser Werte ergiebt sich der Ausdruck

$$J = F(a^2 + e_1 e_2). \tag{99}$$

Noch eine andere bemerkenswerte Eigenschaft der Fixpunkte sei hervorgehoben. ***Die Hauptaxen der Trägheitsellipse in einem beliebigen Punkte halbiren die Winkel zwischen den Verbindungslinien des Punktes mit den beiden Fixpunkten.*** Es folgt dies unmittelbar daraus, dass man dasselbe Trägheitsmoment ($= Fa^2$) in Bezug auf die beiden Geraden PN_1 und PN_2 findet; diese müssen somit symmetrisch in Bezug auf die Hauptaxen der Trägheitsellipse liegen.

4) Man berechne das Trägheitsmoment eines Rechteckes in Bezug auf eine Diagonale und zwar: *a*) mit Hülfe der Trägheitsellipse und *b*) indem man die beiden Dreiecke in Betracht zieht, in welche das Rechteck von der Diagonale zerlegt wird.

5) Wann hat ein Kreisring, dessen äusserer Durchmesser doppelt so gross ist, als der innere, dasselbe Widerstandsmoment *a*) wie ein Kreis und *b*) wie ein Quadrat?

6) Man berechne Trägheits- und Widerstandsmoment einer Ellipse.

7) Zu berechnen das Widerstandsmoment einer Halbellipse in Bezug auf die der Grundlinie parallele Schwerpunktaxe.

8) Welches sind die Trägheits- und Widerstandsmomente eines regulären Sechsecks und eines regulären Achtecks?

9) Ein Kreisring wird durch einen Durchmesser in zwei Stücke zerlegt. Zu berechnen sei das Trägheits- und das Widerstandsmoment des Halbringes in Bezug auf die dem genannten Durchmesser parallele Schwerpunktaxe.

10) Man leite das polare Trägheitsmoment eines regulären n-Ecks in Bezug auf den Mittelpunkt ab und mache den Grenzübergang mit $n = \infty$ zum Kreise.

11) Aus einer Kreisfläche vom Radius R seien n kreisförmige Löcher vom Radius r so ausgeschnitten, dass ihre Mittelpunkte im Abstande a vom Mittelpunkte der Kreisfläche liegen und $r < a < R-r$ ist. Man berechne das polare Trägheitsmoment der Figur in Bezug auf den Mittelpunkt.

12) Zu beweisen, dass alle Axen einer Ebene, in Bezug auf welche eine in der Ebene liegende Figur dasselbe Trägheitsmoment giebt, die Tangenten von confocalen Kegelschnitten sind, welche die beiden Fixpunkte als gemeinschaftliche Brennpunkte besitzen.

§ 12.

Ableitung der Hauptformeln der Biegungsfestigkeit.

A. Innere Spannungen des gebogenen Balkens.

Voraussetzungen.

Bei der folgenden Untersuchung betrachtet man einen prismatischen Balken mit einer verticalen Symmetrieebene, welche die Axe des Balkens sowie sämtliche äusseren Kräfte enthält. Nach § 5 p. 38 müssen diese Kräfte für jeden Querschnitt auf ein in der Symmetrieebene liegendes Kräftepaar reducirt werden können, damit der Balken nur auf Biegung beansprucht sei. Es werde aber hier eine allgemeinere Voraussetzung über die äusseren Kräfte getroffen, und zwar, dass senkrecht zur Balkenaxe in der Symmetrieebene ganz beliebige Kräfte wirken. Im allgemeinen liefern sie dann für jeden Querschnitt eine zur Balkenaxe senkrechte, im Querschnitte liegende Resultirende und ein Kräftepaar wie oben. Durch diese Resultirende wird der Stab auf Abscheren, durch das Kräftepaar auf Biegung beansprucht. In den meisten Fällen der Anwendung kommt hauptsächlich die Biegung in Betracht, so dass vorläufig vom Schube abgesehen werden kann.

Neutrale Faserschicht.

Den prismatischen Balken kann man sich aus Fasern zusammengesetzt denken, welche parallel seiner Längsaxe sind. Wenn der Balken unter dem Einflusse der Kräfte gebogen wird, werden die Fasern zum Teil verlängert, zum Teil verkürzt. Beispielsweise verlängern sich bei der Anordnung in der Fig. 56 die oberen Fasern und verkürzen sich die unteren, während es sich bei der Anordnung in der Figur 57 umgekehrt verhält. Zwischen den beiden Arten von Fasern befindet sich eine Schicht, deren Fasern weder verlängert noch verkürzt werden. Sie bilden zusammen die sog. neutrale Faserschicht.

Elastische Linie.

*Die Linie, in welche die Axe des Balkens bei der Biegung übergeht, heisst **elastische Linie**.*

Um eine Bestimmung der inneren Spannungen und der Deformation des gebogenen Balkens zu ermöglichen, werden in der von Navier[1] aufgestellten Biegungstheorie drei Annahmen gemacht:

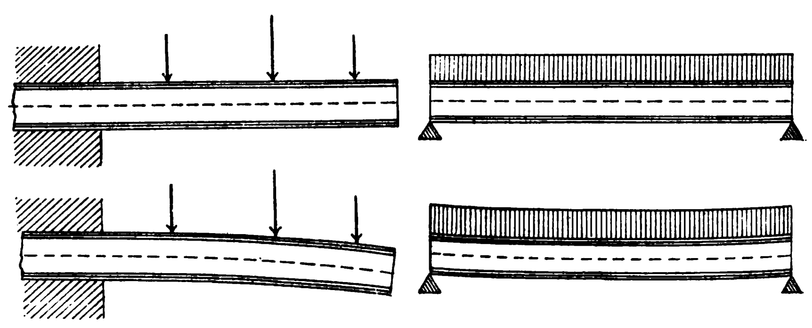


Fig. 56. Fig. 57.

Naviers Annahmen.

1) *Die Deformationen bei der Biegung sind sehr klein.*

2) *Alle Querschnitte bleiben während der Biegung ebene Flächen.*

3) *Die Ebenen der Querschnitte sind auch nach der Biegung senkrecht auf die elastische Linie.*

Die erste dieser Annahmen ist eine allgemeine Voraussetzung, an der in der ganzen Behandlung der Theorie der Elasticität festgehalten wird. Die beiden späteren von Navier aufgestellten Annahmen sind in der Wirklichkeit mehr oder weniger streng erfüllt und geben im allgemeinen mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate; nur für einige Materialien, besonders für Gusseisen, trifft dies nicht zu.

Neutrale Axe.

Aus der zweiten Annahme folgt, dass die neutrale Faserschicht jeden Querschnitt längs einer geraden Linie schneidet, welche die neutrale Axe des Querschnittes genannt wird. Denn betrachtet man ein kurzes Stück des Balkens zwischen zwei Querschnitten (Fig. 58), welche vor der Biegung einander parallel

[1] Siehe näheres: A. Föppl, Festigkeitslehre, dritter Abschnitt.

waren, aber nach der Biegung unter einem kleinen Winkel gegen einander geneigt sind, und nimmt man an, dass drei Punkte *A*, *B* und *C* des Querschnittes, welche nicht in einer geraden Linie liegen, der Schnittlinie des Querschnittes mit der neutralen Faserschicht angehören, so wären die drei entsprechenden Faserabschnitte zwischen den beiden Querschnitten während der Biegung unverändert geblieben. Aber daraus würde folgen, dass die beiden Querschnitte auch nach der Biegung parallel wären. Weil dies jedoch nicht möglich ist, so folgt, dass die Punkte *A*, *B* und *C* in einer geraden Linie, der neutralen Axe liegen müssen. Die neutrale Axe jedes Querschnittes ist senkrecht zu der Symmetrieebene des Balkens und somit auch zur verticalen Symmetrieaxe des Querschnittes (Fig. 59).

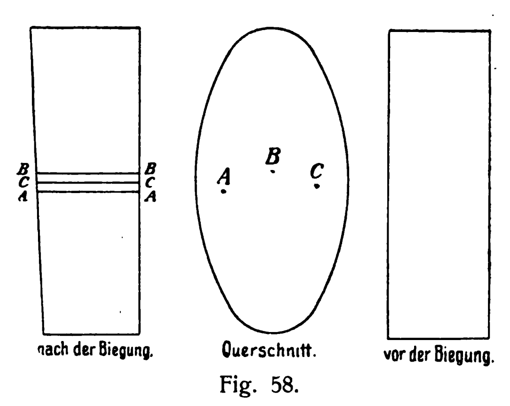


Fig. 58.

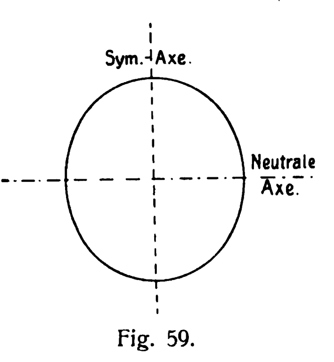


Fig. 59.

Spannungen in einem Querschnitte.

Zur Berechnung der inneren Spannungen in dem Querschnitte eines gebogenen Balkens, wird der Balken in Übereinstimmung mit dem auf p. 9 angegebenen allgemeinen Verfahren durch den Querschnitt in zwei Teile *A* und *B* zerlegt und die inneren Spannungen werden als äussere Kräfte angebracht (Fig. 60).

Auf ein Flächenelement *dF* des Querschnittes wirkt

eine im allgemeinen schief gerichtete Spannung pdF mit einer auf den Querschnitt normalen Componente σdF und

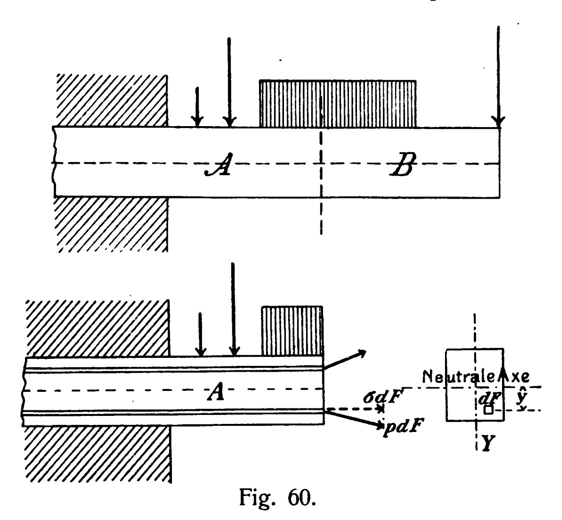


Fig. 60.

einer im Querschnitte liegenden tangentialen Spannungscomponente τdF. Die normale Kraft σdF verursacht die Verlängerung oder Verkürzung der entsprechenden Faser mit dem Querschnitte dF. Weil diese Längenänderung für alle Fasern in dem Abstande y von der neutralen Axe des Querschnittes dieselbe ist, ist σ eine Function von y und werde vollständiger mit σ_y bezeichnet. In der Figur wird y positiv nach unten von der neutralen Axe aus gerechnet; eine Zugspannung σ_y wird als positiv und eine Druckspannung als negativ betrachtet. Auf die am Balkenstück A wirkenden Kräfte, d. h. auf die Spannungen im Querschnitte und auf die äusseren Kräfte, (wobei eventuell vorhandene Widerlagerreactionen mitgerechnet werden), lassen sich jetzt die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden. Die Projectionsgleichung für die Axe des Balkens als Projectionsaxe ergiebt

$$(100) \qquad \int \cos\alpha \,.\, \sigma_y \, dF = \cos\alpha \,.\int \sigma_y \, dF = 0,$$

wo α den (sehr kleinen) Winkel bezeichnet, welchen die Normale des Querschnittes nach der Biegung (d. h. die Tangente der elastischen Linie) mit der ursprünglichen Axenrichtung einschliesst. Weil $\cos \alpha$ nicht gleich Null ist, folgt

$$\int \sigma_y \, dF = 0, \tag{101}$$

wo das Integral über den ganzen Querschnitt auszudehnen ist. Durch Aufstellung der Momentengleichung für die neutrale Axe des Querschnittes als Axe erhält man

$$\int y \, \sigma_y \, dF = M_x \, . \tag{102}$$

Hier bezeichnet M_x die Momentensumme der auf A wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die neutrale Axe des Querschnittes, d. h. das Biegungsmoment für den Querschnitt (siehe § 57, I). Die Bildung der übrigen Gleichgewichtsbedingungen ist nicht notwendig, so lange es sich nur um die Bestimmung der normalen Biegungsspannungen handelt. Es werde aber schon jetzt erwähnt, dass die tangentialen Spannungen des Querschnittes zu einer im Querschnitte liegenden verticalen Resultirenden zusammengesetzt werden können, welche entgegengesetzt gleich der Scherkraft des Querschnittes ist.

Die Gleichung (101) drückt aus, dass die normalen Biegungsspannungen eines Querschnittes einem Kräftepaare äquivalent sind; aus der Gleichung (102) geht hervor, dass das Moment dieses Kräftepaares, vom Vorzeichen abgesehen, gleich dem Biegungsmomente ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass unter den normalen Biegungsspannungen sowohl Zug- wie Druckspannungen vorhanden sind. Die Längenänderung eines Faserabschnittes zwischen zwei unendlich benachbarten Querschnitten (Fig. 61) ist proportional der specifischen Normalspannung σ_y der Faser. Sie ist aber auch proportional dem Ab-

stande y von der neutralen Axe, um welche sich der Querschnitt dreht, während er eben bleibt. Hieraus geht hervor, dass der Ausdruck für σ_y die Form

$$\sigma_y = cy$$

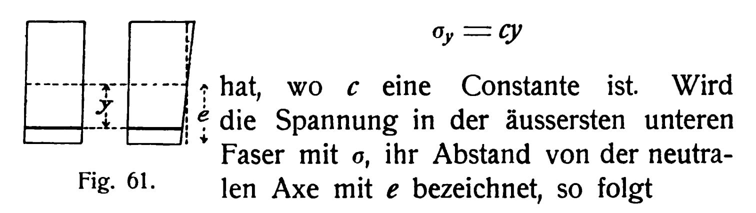


Fig. 61.

hat, wo c eine Constante ist. Wird die Spannung in der äussersten unteren Faser mit σ, ihr Abstand von der neutralen Axe mit e bezeichnet, so folgt

$$\sigma = ce$$

und

(103) $$\sigma_y = \frac{y}{e}\sigma .$$

Setzt man dann diesen Wert in die Gleichungen (101) und (102) ein, so findet man aus der ersteren

$$\int \frac{y}{e}\sigma\, dF = \frac{\sigma}{e}\int y\, dF = 0,$$

d. h.

(104) $$\int y\, dF = 0,$$

und aus der letzteren

$$\int y \frac{y}{e}\sigma\, dF = \frac{\sigma}{e}\int y^2\, dF = M_x ,$$

d. h.

(105) $$\sigma \frac{J}{e} = M_x .$$

Die linke Seite der Gleichung (104) ist das statische Moment des Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe. Da es gleich Null ist, ergiebt sich der Satz:

Die neutrale Axe eines Querschnittes enthält den Schwerpunkt desselben. [1]

[1] In Bezug auf diesen Satz merke man jedoch folgendes. Der Satz stützt sich auf die Gleichung (100), welche nicht völlig streng ist,

Hieraus folgt, dass die elastische Linie des Balkens in der neutralen Faserschicht liegt und dass die Länge der Balkenaxe sich während der Biegung nicht ändert.

In der Gleichung (105), welche die Hauptgleichung für die Biegungsbeanspruchung eines prismatischen Balkens ist, bedeutet J das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die horizontale Schwerpunktaxe, $\frac{J}{e}$ das Widerstandsmoment für dieselbe Axe und σ die mit ihrem Vorzeichen gerechnete Normalspannung der äussersten Faser. Aus der Gleichung (105) erhält man also den Satz:

Das Biegungsmoment für einen Querschnitt ist gleich dem Producte aus der Normalspannung in der äussersten Faser und dem Widerstandsmomente des Querschnittes.

Bei der Ableitung des Satzes kommt es nicht darauf an, ob man die äusserste Faser auf der Zugseite oder auf der Druckseite benützt. Wenn σ' und σ'' die numerischen Werte der Normalspannungen in der äussersten Faser bez. auf der Zug- und auf der Druckseite sind und wenn e' und e'' bez. die Abstände dieser Fasern von der neutralen Axe bezeichnen, so ist

$$(106) \qquad \sigma' \frac{J}{e'} = \sigma'' \frac{J}{e''} = |M_x| .$$

Wenn die Biegungsmomente wie oben angegeben und wie im Abschn. 6, I) berechnet werden, so entspricht einem positiven Werte des Momentes die untere Balken-

weil ein sehr kleines, den Factor $\sin \alpha$ enthaltendes Glied weggelassen wurde, welches von den tangentialen Spannungen abhängt. In folgedessen wird im allgemeinen der Schwerpunkt eines Querschnittes in einem jedenfalls sehr kleinen Abstande von der neutralen Axe liegen. Dieser Abstand ist gleich Null, wenn keine tangentialen Spannungen im Querschnitte vorkommen, d. h. wenn die äusseren Kräfte für den Querschnitt sich auf ein Kräftepaar reduciren, wie auf p. 93 hervorgehoben. Die Deformation ist dann eine reine Biegung.

seite als Zugseite, die obere als Druckseite und umgekehrt im Falle eines negativen Biegungsmomentes. Wenn der aus der Gleichung (105) hervorgehende Wert der Spannung an der unteren Kante

$$\sigma = \frac{e}{J} M_x$$

in die Gleichung (103) eingesetzt wird, so ergiebt sich die Normalspannung im Querschnitte des gebogenen Balkens

$$\sigma_y = \frac{y}{J} M_x \, . \tag{107}$$

Graphisch werden diese Normalspannungen durch die Ordinaten einer geraden Linie (oder einer durch die neutrale Axe gehenden Ebene) dargestellt (Fig. 62).

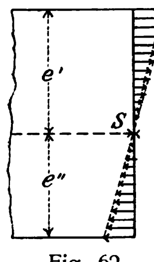


Fig. 62.

Beim prismatischen Balken sind die Widerstandsmomente $\frac{J}{e'}$ und $\frac{J}{e''}$ in allen Querschnitten dieselben. Die Gleichung (106) drückt somit aus, dass *die grösste Zugspannung σ' und die grösste Druckspannung σ'' der einzelnen Querschnitte sich proportional dem Biegungsmomente ändern.* Am grössten sind sie in demjenigen Querschnitte, in welchem $|M_x|$ am grössten ist, und welcher deshalb der gefährliche Querschnitt heisst.

Dimensionirung. Bei der Dimensionirung eines gebogenen prismatischen Balkens, auf welchen gegebene äussere Kräfte wirken, hat man zu beachten, dass die grösste vorkommende Zugspannung die zulässige Zugspannung s' nicht überschreite und dass die grösste vorkommende Druckspannung die zulässige Druckspannung s'' nicht überschreite. Hierbei sind zwar die tangentialen Spannungen des Querschnittes unbeachtet gelassen worden; in § 18 soll untersucht werden, welchen Einfluss sie ausüben und wann sie in Betracht zu ziehen sind.

Es werde zuerst angenommen, dass für das anzuwendende Material $s' = s''$ und $e' = e''$ sei. Man benützt dann die Gleichung (105) in der Form

$$|\sigma| \frac{J}{e} = |M_x|, \tag{108}$$

ersetzt $|M_x|$ durch den Maximalwert max $|M_x|$ und $|\sigma|$ durch die zulässige Normalspannung s, so dass man zur Dimensionirung die Gleichung

$$\frac{J}{e} = \frac{\max |M_x|}{s} \tag{109}$$

erhält. Hieraus ergiebt sich das Widerstandsmoment des Querschnittes. Der Querschnitt ist so zu wählen, dass sein Widerstandsmoment wenigstens die von der Gleichung (109) verlangte Grösse hat. Wenn die Dimensionen des Querschnittes nur von einer Grösse abhängen, wie es z. B. bei dem Kreise, dem Quadrate, dem Rechtecke von maximaler Tragkraft (p. 89) u. s. w. der Fall ist, so wird diese eine Grösse durch das Widerstandsmoment und damit der Querschnitt selbst bestimmt; in anderen Fällen können die Dimensionen des Querschnittes auf verschiedene Arten so gewählt werden, dass das Widerstandsmoment den berechneten Wert erhält.

Es werde ferner angenommen, dass s' und s'' und ebenso e' und e'' verschieden seien. In diesem Falle wird das Material am besten ausgenützt, wenn die grösste Zugspannung σ' und die grösste Druckspannung σ'' gleichzeitig ihre zulässigen Werte s' und s'' erreichen. Nach der Gleichung (106) wird in diesem Falle der Querschnitt am vorteilhaftesten so construirt, dass die Bedingung

$$\frac{s'}{e'} = \frac{s''}{e''}$$

oder

$$\frac{e'}{e''} = \frac{s'}{s''} \tag{110}$$

erfüllt ist. Es ergeben sich dann die beiden Widerstandsmomente des Querschnittes aus den Gleichungen

$$\frac{J}{e'} = \frac{\max|M_x|}{s'}; \tag{111}$$

$$\frac{J}{e''} = \frac{\max|M_x|}{s''}. \tag{112}$$

Unabhängig von der Bedingung (110) wird die Gleichung (111) oder (112) benützt, je nachdem die Zug- oder die Druckseite die massgebende ist.

Da die grössten Normalspannungen des gebogenen Balkens in den äussersten Fasern vorkommen, wählt man gerne solche Querschnittsformen, bei denen der grösste Teil des Materiales möglichst weit von der neutralen Axe angehäuft ist, so z. B. die I und T Profile bei gewalzten Eisenbalken. In anderen Fällen, wie z. B. bei hölzernen Trägern, wäre eine solche Ausarbeitung des Querschnittes zu kostspielig, weshalb das Rechteck und der Kreis die gewöhnlichsten Querschnittsformen sind.

Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass in dem gebogenen Balken nur in den äussersten Fasern des Querschnittes für das maximale Biegungsmoment Spannungen gleich der zulässigen Beanspruchung entstehen. In allen anderen Punkten des Balkens ist die Spannung kleiner als die zulässige. Das Tragvermögen des Materiales kann somit bei Biegung nicht überall völlig ausgenützt werden.

Anwendungen.

Ein schmiedeiserner Rundstab von der Länge l ist an einem Ende horizontal eingemauert (Fig. 63) und trägt am anderen Ende die Belastung P. Es soll der erforderliche Durchmesser berechnet werden unter der Annahme, dass $l = 0.5$ m und $P = 200$ kg sei.

Nach p. 77 ist beim kreisförmigen Querschnitte mit dem Durchmesser d

$$J = \frac{\pi}{64} d^4$$

und

$$\frac{J}{e} = \frac{\pi}{32} d^3.$$

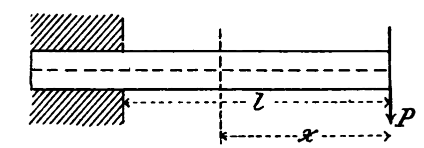


Fig. 63.

Im Abstande x vom freien Ende ist das Biegungsmoment

$$M_x = - Px;$$

dieser Ausdruck ist am grössten für $x = l$, und zwar hat man

$$\max |M_x| = Pl.$$

Man erhält also nach Gleichung (109)

$$\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{Pl}{s},$$

woraus für den gesuchten Durchmesser d folgt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\, Pl}{\pi s}}.$$

Mit den gegebenen numerischen Werten berechnet man für $s = 760$ kg/cm², einer 5-fachen Bruchsicherheit entsprechend,

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 200 \cdot 50}{\pi \cdot 760}} = 5.12 \text{ cm}.$$

2) Ein hölzerner Balken mit rechteckigem Querschnitt ist aus einem runden Blocke vom Durchmesser d so herausgeschnitten, dass seine Tragkraft die grösstmögliche ist; der Balken hat die Länge l und ist an den beiden, in derselben Horizontalebene liegenden Enden unterstützt. Wie gross darf eine über die ganze Länge des Balkens gleichförmig verteilte Belastung sein?

Wenn die Belastung pro Längeneinheit mit p bezeichnet wird (Fig. 64), so ist das grösste Biegungsmoment, welches an der Mitte des Balkens vorhanden ist (p. 293, I)

$$\max |M_x| = \frac{pl^2}{8}.$$

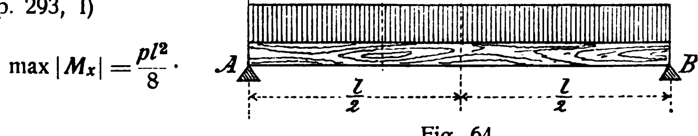


Fig. 64.

Das Widerstandsmoment des Querschnittes ist nach p. 89

$$\frac{J}{e} = \frac{1}{9\sqrt{3}} d^3.$$

Weil die Druckfestigkeit bei Holz kleiner als die Zugfestigkeit ist, so muss die Gleichung (112) benützt werden. Sie liefert

$$\frac{1}{9\sqrt{3}} d^3 = \frac{1}{8} \frac{pl^2}{s''}$$

und

$$p = \frac{8}{9\sqrt{3}} \frac{d^3 s''}{l^2}.$$

Es sei $l = 3.5$ m, $d = 35$ cm, s'' werde $= 45 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2}$ angenommen (10-fache Bruchsicherheit für Föhrenholz). Man erhält dann

$$p = \frac{8}{9\sqrt{3}} \frac{35^3 . 45}{350^2} = 8.08 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}} = 808 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

Das eigene Gewicht des Balkens beträgt pro lauf. m. ungefähr

$$\gamma bh = \gamma \frac{\sqrt{2}}{3} d^2 = 0.5 \frac{\sqrt{2}}{3} 0.35^2 . 1000 = 28.9 \text{ kg},$$

so dass mit Berücksichtigung des Eigengewichts zu wählen wäre:

$$p \sim 780 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

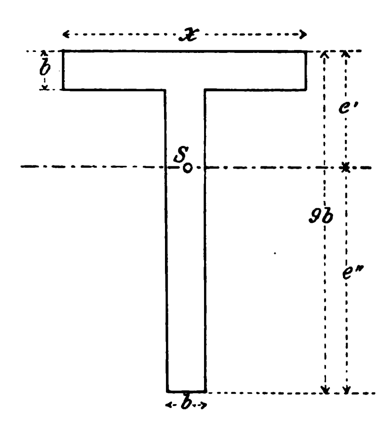


Fig. 65.

3) Wie muss das Verhältnis $x : b$ des in Figur 65 dargestellten T Querschnittes eines gusseisernen Trägers gewählt werden, damit die Widerstandsfähigkeit des Materiales möglichst gut ausgenützt werde, wenn die obere Seite die Zugseite ist?

Der Querschnitt muss so construirt werden, dass die Bedingung (110)

$$\frac{e'}{e''} = \frac{s'}{s''}$$

erfüllt wird. Für Gusseisen wählt man in der Praxis etwa

$$\frac{s'}{s''} = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{e'}{e''} = \frac{1}{2}$$

und nach der Figur

$$e' = 3b; \; e'' = 6b.$$

Es soll x so bestimmt werden, dass diese Gleichungen befriedigt sind. Nach den Formeln auf p. 80 findet man

$$6b = e'' = \frac{1}{2} \frac{x\,(9b)^2 - (x-b)\,(8b)^2}{x \,.\, 9b - (x-b)\,8b}$$

und nach Auflösung dieser Gleichung

$$x = 6.4\; b.$$

Mit dieser Wahl von x ergeben sich das centrale Trägheitsmoment

$$J = 115.2\; b^4,$$

und die beiden Widerstandsmomente

$$\frac{J}{e'} = 38.4\; b^3; \; \frac{J}{e''} = 19.2\; b^3.$$

4) Ein an beiden Enden frei aufliegender schmiedeiserner Balken von 6 m Länge und mit I Profile soll eine gleichförmig verteilte Last von $500 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ tragen. Die Querschnittsdimensionen werden gesucht.

Mit den in der Aufgabe 2) angewendeten Bezeichnungen hat man

$$\frac{J}{e} = \frac{1}{8} \frac{pl^2}{s}$$

und erhält nach Einsetzen der numerischen Werte

$$\frac{J}{e} = \frac{1}{8} \frac{5 \,.\, 600^2}{760} = 296 \text{ cm}^3.$$

Unter den deutschen Normalprofilen kommt das Profil N:o 23 mit $\frac{J}{e} = 317 \text{ cm}^3$ dem berechneten am nächsten. Seine Dimensionen sind die folgenden:

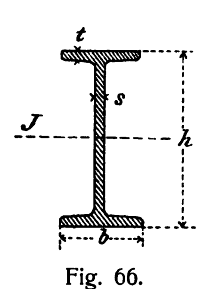


Fig. 66.

Höhe:	$h = 23$ cm,
Breite des Kopfes und des Fusses	$b = 10.2$ cm,
Dicke des Steges	$s = 0.84$ cm,
Dicke des Fusses	$t = 1.26$ cm.

Das eigene Gewicht beträgt 33 $\frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Bei Berücksichtigung desselben ist das oben gefundene Widerstandsmoment noch ausreichend.

B. Die Formänderung des gebogenen Balkens.

Die Form eines gebogenen Balkens ist durch seine elastische Linie völlig bestimmt (p. 93). In dem hier zu behandelnden Falle ist die elastische Linie eine ebene Curve, deren Krümmung in allen Punkten innerhalb des Balkens sehr klein ist, in Übereinstimmung mit der ersten auf p. 94 getroffenen Annahme. Trotzdem ist die Ermittelung der elastischen Linie von grosser Bedeutung, besonders bei den statisch unbestimmten Constructionen. Zu diesen gehören u. a. die continuirlichen Balken, d. h. die Träger mit mehr als zwei Stützpunkten; sie werden unten in §§ 13 und 14 behandelt.

Krümmungsradius der elastischen Linie.

Ein Balken sei in irgend einer Weise belastet und besitze ursprünglich eine horizontale Axe (Fig. 67). In der verticalen Symmetrieebene des Balkens werden eine horizontale x-Axe und eine verticale y-Axe gewählt. Ein sehr kurzer Abschnitt von der Länge a zwischen zwei benachbarten Querschnitten (Fig. 68)

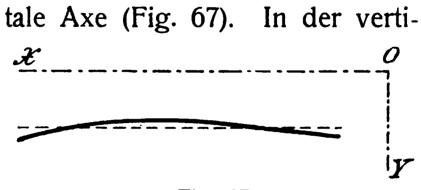


Fig. 67.

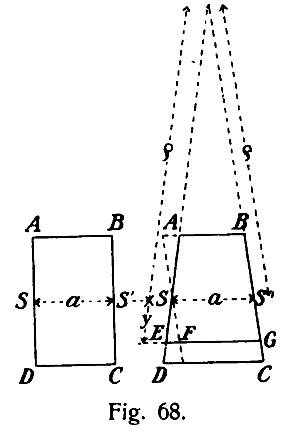


Fig. 68.

wird bei der Biegung so deformirt, dass die Endflächen eine kleine Neigung gegen einander bekommen. Der Punkt, in welchem ihre Schnittlinie die xy-Ebene trifft, ist der Krümmungsmittelpunkt des betrachteten kurzen Stückes der elastischen Linie. Der Krümmungsradius werde mit ϱ bezeichnet. Eine Faser EG in dem Abstande y von der neutralen Axe besitzt nach p. 100 die Spannung

$$\sigma_y = \frac{y}{J} M_x \tag{113}$$

und erleidet dabei nach dem Hooke'schen Gesetze (p. 44) die Längenänderung

$$\lambda = \frac{\sigma_y \cdot a}{E} = \frac{ya\, M_x}{JE} . \tag{114}$$

Aus den ähnlichen Dreiecken OSS' und SEF folgt

$$\frac{\varrho}{a} = \left| \frac{y}{\lambda} \right| . \tag{115}$$

Ersetzt man in der Gleichung (115) λ durch den Wert (114), so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{JE}{|M_x|} . \tag{116}$$

Legt man, wie es in der Theorie der Curven gebräuchlich ist, dem Krümmungsradius ein bestimmtes Vorzeichen bei, indem man

$$\varrho = \frac{JE}{M_x} \tag{117}$$

setzt, so wird ϱ positiv oder negativ, je nachdem die elastische Linie ihre convexe Seite nach unten oder nach oben kehrt.

Wendepunkte.

Der Krümmungsradius ist unendlich gross in den Punkten, für welche

$$M_x = 0$$

ist. Sie sind Inflexions- oder Wendepunkte der elastischen Linie (Fig. 69). Nach der Gleichung (107) sind die Normalspannungen gleich Null in allen Punkten eines Querschnittes, in welchem die elastische Linie einen Wendepunkt besitzt. In einem solchen Querschnitte könnte der Balken durchschnitten werden, ohne dass der Spannungszustand eine Veränderung erfahren würde, wenn man die beiden durch den Schnitt getrennten Balkenstücke durch ein Gelenk verbindet oder direkt auf einander legt (Fig. 70).

Fig. 69.

Differentialgleichung der elastischen Linie.

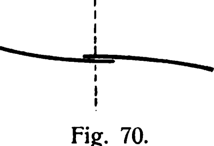


Fig. 70.

Setzt man in die Gleichung (117) den allgemeinen Ausdruck für den Krümmungsradius einer Curve

$$\varrho = \pm \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ein und wählt das Zeichen $+$, so erhält man als Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{JE}. \tag{118}$$

Auf Grund der ersten Annahme auf p. 94 vereinfacht sich diese Gleichung wesentlich. Da die Tangente der elastischen Linie in jedem Punkte sehr wenig von der ursprünglichen horizontalen Lage der Stabaxe abweicht, so ist $\frac{dy}{dx}$ eine kleine Grösse und man kann mit genü-

gender Genauigkeit den Nenner auf der linken Seite der Gleichung (118), d. h.

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\dots$$

durch 1 ersetzen. Die vereinfachte Gleichung der elastischen Linie ist dann

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_x}{JE}. \tag{119}$$

Damit jedoch diese Gleichung auch in Bezug auf das Zeichen richtig sei, muss die y-Axe nach oben gerichtet gedacht werden.

Wenn man eine andere Wahl über die Richtung der positiven y-Axe getroffen oder M_x in anderer Weise als oben berechnet hat, so empfiehlt es sich statt (119) die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{M_x}{JE} \tag{120}$$

anzuwenden und hierin das Zeichen durch die Betrachtung der Concavität oder Convexität der elastischen Linie in irgend einem Punkte festzustellen.

In der Gleichung (119) ist die rechte Seite eine gegebene Function von x. Durch die erste Integration der Gleichung erhält man

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{JE}\int M_x\,dx+C_1, \tag{121}$$

womit die Tangente der elastischen Linie bestimmt ist. Eine zweite Integration ergiebt als Gleichung der elastischen Linie

$$y=\frac{1}{JE}\int dx\int M_x\,dx+C_1x+C_2. \tag{122}$$

Bemerkenswerte Punkte der elastischen Linie sind diejenigen, in welchen die Durchbiegung am grössten ist. In einem solchen Punkte ist $|y|$ ein Maximum, $\frac{dy}{dx} = 0$. Eine Ausnahme tritt ein, wenn die grösste Durchbiegung an einem freien Ende des Balkens vorkommt.

Anwendungen.

1) *Ein an einem Ende eingespannter Balken ist am anderen Ende belastet. Man suche die Gleichung der elastischen Linie und die grösste Durchbiegung.*

Mit dem Coordinatensysteme und den Bezeichnungen in der Figur 71 hat man

$$M_x = -Px,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{JE},$$

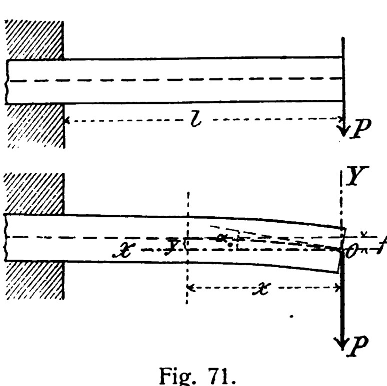


Fig. 71.

und erhält somit als Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{JE}.$$

Durch eine erste Integration dieser Gleichung folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{JE}\frac{x^2}{2} + C_1 = \operatorname{tg} \alpha,$$

wobei α den Neigungswinkel der Tangente gegen die Horizontalebene bezeichnet. Die Constante C_1 wird durch die Bedingung bestimmt, dass für $x = l$ $\alpha = 0$ sein muss. Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2JE}(l^2 - x^2) = \operatorname{tg} \alpha. \tag{123}$$

Der Neigungswinkel α ist am grössten im Coordinatenanfangspunkte und hat dort den Wert

$$\text{tg}\,\alpha_0 = \frac{Pl^2}{2JE}. \tag{124}$$

Eine zweite Integration liefert dann, wenn die Integrationsconstante so bestimmt wird, dass x und y gleichzeitig gleich Null werden, die Geichung der elastischen Linie

$$y = \frac{P}{2JE} x \left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right). \tag{125}$$

Die elastische Linie ist eine P a r a b e l d r i t t e r O r d n u n g.

Die grösste Durchbiegung f, welche am freien Ende vorkommt, ist gleich dem Werte von y für $x = l$ und zwar

$$f = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{JE}. \tag{126}$$

Je grösser J ist, um so kleiner ist f und um so steifer der Balken. Dasselbe gilt auch für solche Balken, die in anderer Weise aufgelagert oder eingespannt sind.

Das Moment M_x verschwindet nur für $x = 0$. Innerhalb des Balkens kommt somit kein Wendepunkt vor, die elastische Linie kehrt überall die convexe Seite nach oben.

2) *Ein Balken sei an beiden Enden unterstützt und gleichförmig über die ganze Länge belastet.*

Mit den Bezeichnungen in der Figur 72 wird das Biegungsmoment (vergl. p. 291, I)

$$M_x = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right);$$

die Differentialgleichung der elastischen Linie ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2JE}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right).$$

Durch Integration ergiebt sich, wenn die Constanten den Bedingungen der Aufgabe gemäss bestimmt werden,

(127) $$\frac{dy}{dx} = \frac{px}{2JE}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

und

(128) $$y = \frac{px^2}{8JE}\left(\frac{l^2}{2} - \frac{x^2}{3}\right).$$

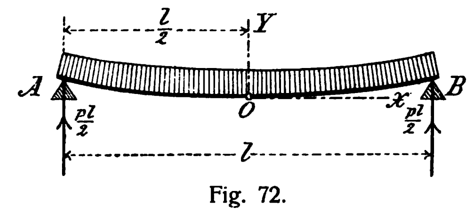


Fig. 72.

Die elastische Linie ist also eine in Bezug auf die y-Axe symmetrische P a r a b e l v i e r t e r O r d n u n g.

Die grösste Durchbiegung, welche in der Balkenmitte vorkommt, wird erhalten, indem man in der Gleichung (128) $x = \frac{l}{2}$ und $y = f$ setzt,

(129) $$f = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{JE}.$$

Beispielsweise findet man für den auf p. 105 berechneten gewalzten schmiedeisernen Balken, dessen Querschnitt das Trägheitsmoment $J = 3642 \text{ cm}^4$ besitzt,

$$f = \frac{5}{384}\frac{500 \,.\, 600^4}{100 \,.\, 3642 \,.\, 2000000} = 1.2 \text{ cm}.$$

Die Deformation ist somit ziemlich klein; die grösste Durchbiegung beträgt nur $\frac{1}{500}$ der Länge.

3) *An einem Ende eingespannter, gleichförmig belasteter Balken* (Fig. 73). Es ist

$$M_x = -\frac{px^2}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{px^2}{2JE},$$

Fig. 73.

(130) $$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{6JE}(l^3 - x^3) = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{pl^3}{6JE}.$$

(131) $$y = \frac{px}{6JE}(l^3 - \tfrac{1}{4} x^3).$$

(132) $$f = \frac{pl^4}{8JE}.$$

4) *Eingespannter Balken, welcher von einem Kräftepaare am freien Ende angegriffen wird* (Fig. 74). Wenn das Moment des Kräftepaares gleich M ist, so folgt

$$M_x = -M,$$

Fig. 74.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{JE}.$$

(133) $$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{JE}(l - x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{Ml}{JE}.$$

(134) $$y = \frac{Mx(2l - x)}{2JE}.$$

(135) $$f = \frac{Ml^2}{2JE}.$$

Die elastische Linie ist eine gewöhnliche Parabel mit verticaler Axe, deren Scheitel im Einspannungsquerschnitte liegt.

Wendet man zur Bestimmung der elastischen Linie direct die Gleichung (116) an, so findet man

$$\varrho = \frac{JE}{M} = \text{constant}, \tag{136}$$

somit einen Kreis als elastische Linie. Dieser Kreis ist der Krümmungskreis der obigen Parabel im Scheitelpunkte.

§ 13.

Besondere Fälle gebogener, prismatischer Balken.

Momentenfläche.

Zur Bestimmung des gefährlichen Querschnittes eines gebogenen Balkens ist es oft vorteilhaft, das Biegungsmoment mit Hülfe der Culmann'schen Momentenfläche graphisch darzustellen, wie in § 57, I gezeigt worden ist. Die Momentenfläche wird, ausser von der Schlusslinie, zwischen zwei einzelnen Belastungen von einer geraden Linie begrenzt, falls keine continuirliche Belastung vorhanden ist, dagegen von Curvenstücken auf solchen Strecken, wo stetig verteilte Belastungen angebracht sind. Ist die Belastung insbesondere gleichförmig verteilt, so ist die Begrenzungscurve ein Stück einer gewöhnlichen Parabel mit verticaler Axe. In den folgenden Beispielen gebogener Balken ist die Momentenfläche gezeichnet.

1) *An beiden Enden horizontal eingespannter, in der Mitte belasteter Balken* (Fig. 75).

Die Reactionen bestehen an jedem Ende aus einer verticalen, nach oben gerichteten Kraft $\frac{P}{2}$ und einem Kräftepaare mit einem bis auf weiteres unbekannten Momente M, welches an beiden Enden verschiedenen Dreh-

ungssinn hat. Für die linke Balkenhälfte ergiebt sich das Biegungsmoment

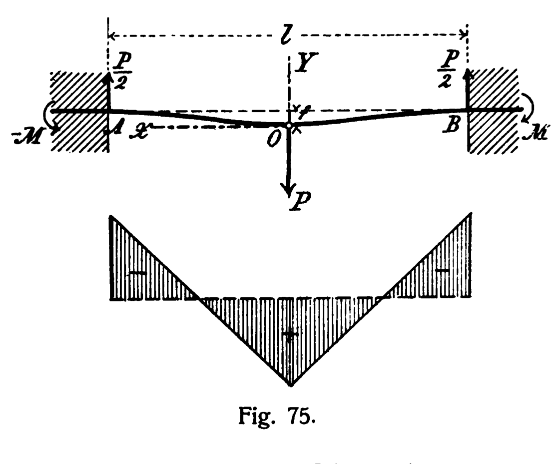


Fig. 75.

$$M_x = -M + \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right);$$

als Differentialgleichung der elastischen Linie erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{JE} = \frac{1}{JE}\left\{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - M\right\},$$

wobei das Zeichen durch die Betrachtung der Convexität der elastischen Linie in der Nähe des Endes bestimmt worden ist. Nach einmaliger Integration folgt

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{JE}\left\{\frac{P}{4} x (l - x) - Mx + C_1\right\}.$$

Da für $x = 0$ auch $\alpha = 0$ ist, wird $C_1 = 0$, und somit

$$(137) \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{JE}\left\{\frac{P}{4} x(l - x) - Mx\right\}.$$

Das unbekannte Kräftepaar M ergiebt sich daraus, dass für $x = \frac{l}{2}$ $\alpha = 0$ sein muss, und zwar findet man

$$M = \frac{Pl}{8}.$$

Wenn dieser Wert in die Gleichung (137) eingesetzt wird, so folgt

(138) $$\frac{dy}{dx} = \frac{Px}{4JE}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Eine nochmalige Integration ergiebt schliesslich mit Benutzung der Bedingung $y = 0$ für $x = 0$,

(139) $$y = \frac{Px^2}{4JE}\left(\frac{l}{4} - \frac{x}{3}\right).$$

Die elastische Linie ist somit eine Parabel dritter Ordnung. Die grösste Durchbiegung kommt in der Mitte vor und hat die Grösse

(140) $$f = \frac{1}{192}\frac{Pl^3}{JE}.$$

Innerhalb der linken Balkenhälfte ist das nunmehr bekannte Biegungsmoment

(141) $$M_x = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{4} - x\right).$$

Es wird Null für $x = \frac{l}{4}$, einem Wendepunkte der elastischen Linie entsprechend. Ein zweiter Wendepunkt liegt symmetrisch zum ersten in Bezug auf die Mitte. Die gefährlichen Querschnitte kommen bei A, B und O vor; die entsprechenden Momente sind

(142) $$M_0 = \frac{Pl}{8}; \ M_{\frac{l}{2}} = M_{-\frac{l}{2}} = -\frac{Pl}{8}.$$

Sie stimmen dem absoluten Werte nach überein.

2) *Ein Balken ist an einem Ende horizontal eingespannt und am anderen, in derselben Horizontalebene liegenden Ende unterstützt. Die Belastung ist in einem Punkte*

concentrirt und das eigene Gewicht wird nicht in Betracht gezogen (Fig. 76).

Die Reaction A in dem linken Unterstützungspunkte ist unbekannt, und kann nicht auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmt werden. Es liegt somit ein statisch unbestimmter Fall vor, ebenso wie bei dem unter 1) behandelten Beispiele. Man könnte sich jetzt der Differentialgleichung der elastischen Linie bedienen, kommt aber einfacher zum Resultate mit Benutzung früher gefundener Ergebnisse.

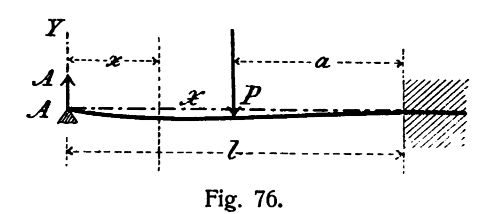


Fig. 76.

Zu dem Zwecke berechnet man zuerst die Einsenkung des freien Balkenendes A unter dem Einflusse der Kraft P allein, nachher die Erhöhung desselben Endes unter dem Einflusse der Reaction A allein, und findet alsdann A aus der Bedingung, dass Einsenkung und Erhöhung gleich gross sein müssen. Die von der Last P verursachte Senkung f_1 (Fig. 77) besteht aus zwei Teilen f_1' und f_1'', von welchen die erstere durch die Biegung des Stückes a entsteht und nach der Formel (126) gleich

$$f_1' = \frac{1}{3} \frac{Pa^3}{JE}$$

Fig. 77.

ist, während die letztere von der Neigung der Tangente der elastischen Linie im Punkte P herrührt und mit Hülfe der Gleichung (124) zu

$$f_1'' = (l - a) \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{Pa^2 (l - a)}{JE}$$

berechnet wird. Hieraus folgt

$$f_1 = f_1' + f_1'' = \tfrac{1}{6}\frac{Pa^2(3l - a)}{JE}.$$

Die Reaction A allein ergiebt nach (126) eine Hebung des freien Endes um

$$f_2 = \tfrac{1}{3}\frac{Al^3}{JE}.$$

Aus der Gleichheit von f_1 und f_2 berechnet sich jetzt

$$A = \frac{a^2(3l - a)}{2l^3}P \tag{143}$$

oder, mit Anwendung der Bezeichnung

$$\frac{a}{l} = n,$$

$$A = \frac{n^2(3 - n)}{2}P. \tag{144}$$

Nachdem A gefunden ist, kann das Biegungsmoment in jedem Querschnitte des Balkens berechnet werden. Innerhalb des Teiles I (Fig. 79) hat man

$$0 < x < l - a, \qquad M_x = Ax$$

und innerhalb des Teiles II

$$l - a < x < l, \qquad M_x = (A - P)x + P(l - a).$$

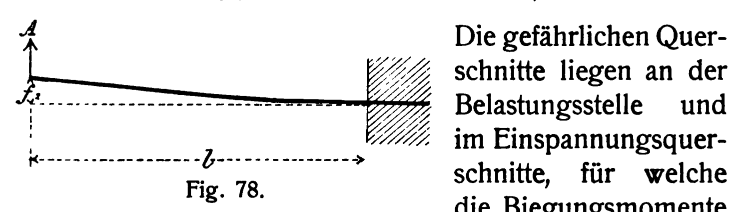


Fig. 78.

Die gefährlichen Querschnitte liegen an der Belastungsstelle und im Einspannungsquerschnitte, für welche die Biegungsmomente

$$M_1 = A(l - a)$$

und

$$M_2 = Al - Pa$$

sich ergeben. Mit Hülfe des Wertes (144) von A folgt

$$|M_1| = \frac{Pl}{2} n^2 (1 - n)(3 - n)$$

und

$$|M_2| = \frac{Pl}{2} n (1 - n)(2 - n),$$

ferner

(145) $$\left|\frac{M_1}{M_2}\right| = \frac{n(3-n)}{2-n}.$$

Das Verhältnis $\left|\frac{M_1}{M_2}\right|$ hängt also von der Lage der Belastung ab.

Der Balken wird in den beiden betrachteten Querschnitten gleich stark angestrengt, wenn

$$|M_1| = |M_2|,$$

d. h.

$$n(3-n) = 2 - n$$

ist. Durch Auflösung dieser Gleichung folgt

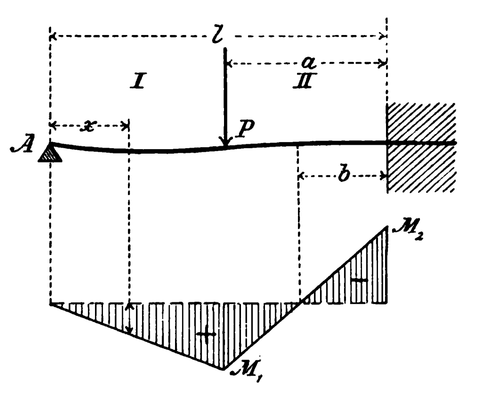


Fig. 79.

$$n = 2 \pm \sqrt{2};$$

für das vorliegende Problem kommt aber nur der Wert

(146) $$n = 2 - \sqrt{2} = 0.5858$$

in Betracht, weil $0 < n < 1$ sein muss. Das grösste Biegungsmoment ist

(147) $$\max |M_x| = \frac{Pl}{2} n^2 (1 - n)(3 - n) = 0.1716\, Pl.$$

Hat man dagegen

$$n > 0.5858,$$

so ist

$$|M_1| > |M_2|,$$

und falls

$$n < 0.5858,$$

$$|M_1| < |M_2|.$$

Zur Bestimmung der Lage des Wendepunktes innerhalb II benützt man die Gleichung

$$\frac{b}{a} = \frac{|M_2|}{|M_1| + |M_2|} = \frac{2 - n}{2 + 2n - n^2};$$

hieraus folgt

$$b = \frac{(2 - n)n}{2 + 2n - n^2}\, l. \tag{148}$$

Wenn P sich von dem Einspannungsquerschnitte aus nach dem linken Ende hin bewegt, indem n von 0 bis 1 wächst, so bewegt sich auch der Wendepunkt der elastischen Linie und zwar in demselben Sinne wie P, was sich daraus ergiebt, dass die Ableitung

$$\frac{db}{dn} = \frac{4\,(1 - n)}{(2 + 2n - n^2)^2}\, l$$

positiv ist. Die Grenzlagen sind

$$b = 0 \text{ für } n = 0$$

und

$$b = \frac{l}{3} \text{ für } n = 1,$$

sodass also der Wendepunkt in dem rechten Drittel des Balkens verbleibt.

3) *Continuirlicher Balken auf drei Stützen. Symmetrische Anordnung.*

Die unter 2) gefundenen Resultate können benützt werden zur Berechnung eines continuirlichen Balkens auf

drei Stützen, welche ebenso wie die Belastung in Bezug auf die Mitte symmetrisch angeordnet vorausgesetzt werden (Fig. 80). Die Stützen liegen in derselben Horizontal-

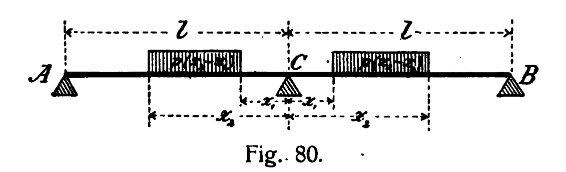


Fig. 80.

ebene und die Belastung ist gleichförmig über eine bestimmte Strecke jedes Feldes verteilt.

Auf Grund der Symmetrie ist die Tangente der elastischen Linie über der Mittelstütze horizontal. Die Beanspruchung einer Trägerhälfte ist also dieselbe wie bei einem an einem Ende horizontal eingespannten Balken von der Länge l, welcher am anderen, in derselben Horizontalebene liegenden Ende unterstützt ist und die Belastung $p(x_2 - x_1)$ trägt (Fig. 81).

Es soll zuerst die Reaction A ermittelt werden. Nach der Formel (144) liefert eine unendlich kleine Belastung $p\,da$ zur Reaction A den Beitrag

Fig. 81.

$$dA = \frac{n^2(3-n)}{2}\,p\,da = \frac{p}{2l^3}\,a^2(3l-a)\,da.$$

Die totale Reaction ist also

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{p}{2l^3}\,a^2(3l-a)\,da,$$

d. h.

$$(149) \qquad A = \frac{p}{2l^3}\left\{ l(x_2^3 - x_1^3) - \tfrac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4) \right\}.$$

Nachdem A gefunden ist, berechnet man die beiden anderen Reactionen mit Hülfe der Gleichungen

$$B = A,$$

(150) $$C = 2p\,(x_2 - x_1) - 2A.$$

Bei der Berechnung der Biegungsmomente innerhalb der linken Balkenhälfte ist zwischen den drei Abteilungen I, II und III (Fig. 81) ein Unterschied zu machen. Innerhalb der Abteilung I gilt, wenn x den Abstand des Schnittes von A bezeichnet,

$$0 < x < l - x_2 \text{ und } M_x = Ax,$$

innerhalb der Ableitung II ist

$$l - x_2 < x < l - x_1 \quad \text{und} \quad M_x = Ax - \frac{p}{2}(x + x_2 - l)^2$$

und schliesslich hat man innerhalb der Abteilung III

$$l - x_1 < x < l \,\text{und}\, M_x = Ax - p(x_2 - x_1)\left(x + \frac{x_1 + x_2}{2} - l\right).$$

Graphisch werden die Biegungsmomente des continuirlichen Balkens durch die in der Fig. 82 gezeichnete

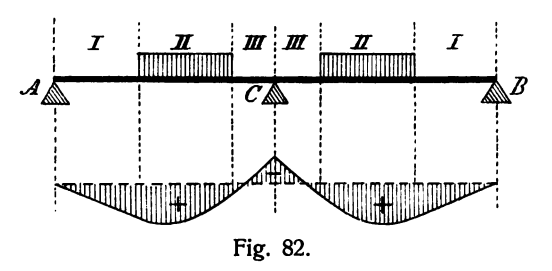


Fig. 82.

Momentenfläche dargestellt. Die gefährlichen Querschnitte kommen bei der Balkenmitte und den Scheiteln der Parabeln innerhalb der Abteilungen II vor.

Es werde jetzt angenommen, dass die gleichförmige Belastung sich über die ganze Länge des Balkens erstrecke (Fig. 83). Wenn man für diesen Fall in den obigen Formeln $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ einsetzt, so findet man die Reactionen

$$A = B = \frac{3}{8} pl,$$

(151) $$C = \frac{5}{4} pl,$$

sowie das Biegungsmoment innerhalb der linken Balkenhälfte

$$M_x = Ax - \tfrac{1}{2} px^2 = \frac{p}{8} x (3l - 4x).$$

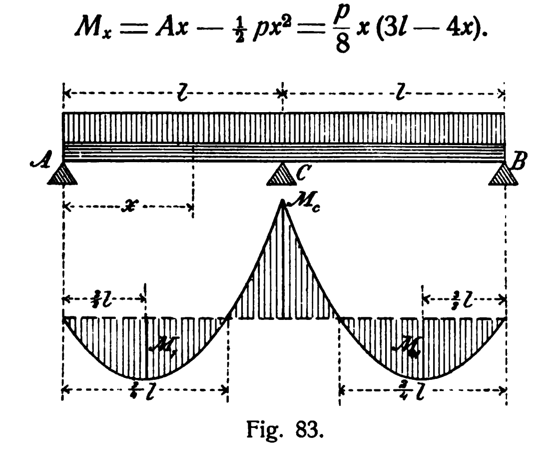


Fig. 83.

Für $x = \frac{3}{4} l$ hat man $M_x = 0$ und einen Wendepunkt der elastischen Linie, ferner für $x = \frac{3}{8} l$, dem Scheitel der die Momentenfläche begrenzenden Parabel entsprechend, das maximale Biegungsmoment

$$M_1 = \frac{9}{128} pl^2 = 0.07031\, pl^2.$$

Über der Mittelstütze ist das Biegungsmoment

(152) $$M_c = -\frac{1}{8} pl^2 = -0.125\, pl^2,$$

somit absolut genommen das grösste und das bei der Dimensionirung massgebende.

Wie auf p. 108 erwähnt wurde, könnte der continuirliche Balken an den Inflexionsstellen durchschnitten wer-

den, wenn der Zusammenhang der einzeilnen Stücke durch directe Auflagerung oder durch Gelenke erhalten bleibt. Innerhalb des Feldes AC kann alsdann das Stück links als ein frei aufliegender Balken betrachtet werden (Fig. 84); es

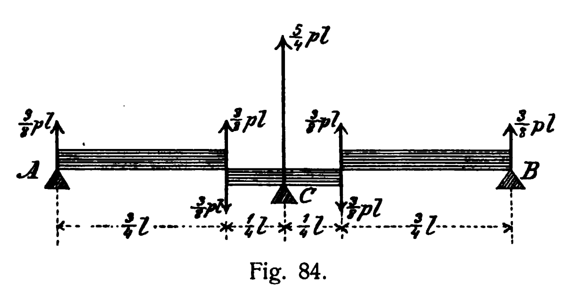


Fig. 84.

ergeben sich die Werte der Reactionen ohne weiteres, wenn die Lage der Wendepunkte bekannt ist. Ähnliches gilt für das rechte Feld.

Vorteilhafteste Construction.

Bei dem eben behandelten continuirlichen, in seiner ganzen Länge gleichförmig belasteten Balken tritt die grösste Beanspruchung in der Balkenmitte auf. Durch eine Senkung der Mittelstütze kann man bewirken, dass $|M_c|$ abnimmt, während M_1 wächst; man kann also die Tragkraft des Balkens vergrössern. Der vorteilhafteste Fall entspricht der Bedingung $|M_c| = M_1$; es soll die hierzu erforderliche Senkung der Mittelstütze berechnet werden. Zu diesem Zwecke betrachtet man die Lage der Wendepunkte. Es sei 2ξ der Abstand des Wendepunktes im linken Felde von A (Fig. 85). Alsdann hat man

$$M_1 = \frac{p\xi^2}{2},$$

$$M_C = -p\xi(l - 2\xi) - \tfrac{1}{2}p(l - 2\xi)^2 = -\frac{p}{2}l(l - 2\xi).$$

Die Bedingung

$$M_1 = -M_C$$

liefert zur Bestimmung von ξ die Gleichung zweiten Grades

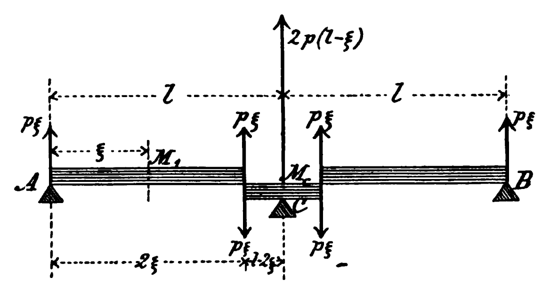


Fig. 85.

$$\frac{\xi^2}{2} = \frac{l\,(l - 2\xi)}{2}$$

oder

$$\xi^2 + 2l\xi - l^2 = 0.$$

Die Wurzel

$$\xi = (\sqrt{2} - 1)\, l = 0.4142\; l \tag{153}$$

liefert die Lage des Inflexionspunktes. Ferner folgt

$$A = B = p\xi = 0.4142\; pl,$$

$$C = 1.1716\; pl, \tag{154}$$

$$\max |M_x| = M_1 = |M_c| = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\, pl^2 = 0.08579\; pl^2.$$

Auch die Senkung h der Mittelstütze kann jetzt gefunden werden. Man betrachtet einen einseitig eingespannten Balken (Fig. 86), welcher gleichförmig belastet ist und ausserdem am freien Ende von der aufwärts gerichteten Kraft A angegriffen wird. Mit Anwendung der auf p. 111 und 113 gefundenen Resultate folgt hierbei

Fig. 86.

$$h = \frac{Al^3}{3JE} - \frac{pl^4}{8JE} = 0.01307\, \frac{pl^4}{JE}. \tag{155}$$

4) *Continuirlicher Balken auf drei Stützen mit unsymmetrischer Anordnung. Gleichförmige Belastung.*

Es werde angenommen, dass die Auflager in derselben Horizontalebene liegen und dass die Belastung sich gleichförmig über den ganzen Balken erstrecke (Fig. 87). An der Stütze C ist die elastische Linie unter dem kleinen Winkel v gegen die Horizontalebene geneigt. Man kann sich den Balken als unter diesem Winkel eingespannt, sonst frei denken, wobei die gleichförmige Belastung und die beiden nach aufwärts gerichteten Kräfte A und B an den Enden angebracht sind. In ähnlicher Weise wie auf p. 117 drückt man dann die Bedingung aus, dass die Punkte A, B und C der elastischen Linie in derselben Horizontalen liegen. Dabei sind drei Einflüsse in Betracht zu ziehen und zwar die Neigung v bei C, die Kräfte A und B sowie die gleichförmige Belastung (Siehe die Formeln (126) und (132)). In der genannten Reihenfolge liefern diese Einflüsse folgende Erhöhungen von A über C:

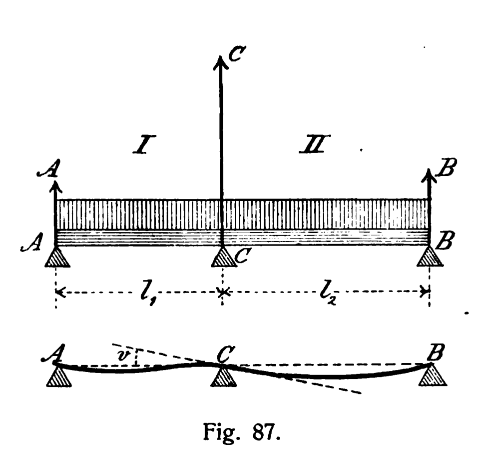


Fig. 87.

$$l_1 v, \frac{A l_1^3}{3JE}, -\frac{p l_1^4}{8JE}.$$

Weil die gesamte Erhöhung gleich Null sein muss, so folgt

$$l_1 v + \frac{A l_1^3}{3JE} - \frac{p l_1^4}{8JE} = 0,$$

und nach Division mit l_1

$$v + \frac{Al_1^2}{3JE} - \frac{pl_1^3}{8JE} = 0.$$

In ähnlicher Weise ergiebt die Betrachtung des Endpunktes B

$$-v + \frac{Bl_2^2}{3JE} - \frac{pl_2^3}{8JE} = 0.$$

Wenn diese beiden Gleichungen addirt werden, so verschwindet der unbekannte Winkel v und man erhält

$$(156) \qquad Al_1^2 + Bl_2^2 = \frac{3}{8} p\,(l_1^3 + l_2^3).$$

Eine zweite Gleichung zwischen A und B ist die Momentengleichung aller Kräfte in Bezug auf C als Pol, nämlich

$$(157) \qquad Al_1 - Bl_2 = \tfrac{1}{2} p\,(l_1^2 - l_2^2).$$

Durch Auflösung beider Gleichungen folgt dann

$$(158) \qquad \begin{aligned} A &= p\,\frac{3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2}{8l_1}, \\ B &= p\,\frac{3l_2^2 + l_1 l_2 - l_1^2}{8l_2}. \end{aligned}$$

Endlich ist die Reaction an der Stütze C

$$(159) \qquad \begin{aligned} C &= p(l_1 + l_2) - (A + B) = \\ &= p\,\frac{(l_1 + l_2)\,(l_1^2 + 3l_1 l_2 + l_2^2)}{8l_1 l_2}. \end{aligned}$$

Nachdem die drei Auflagerreactionen gefunden sind, lassen sich die Biegungsmomente berechnen. So findet man für einen Querschnitt im Felde I (Fig. 88), im Abstande x von dem Auflager A,

$$M_x = Ax - \tfrac{1}{2} px^2 = \frac{px}{8l_1}\{(3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2) - 4l_1 x\}.$$

Es wird $M_x = 0$, d. h. es ergiebt sich ein Wendepunkt der elastischen Linie in dem Querschnitte

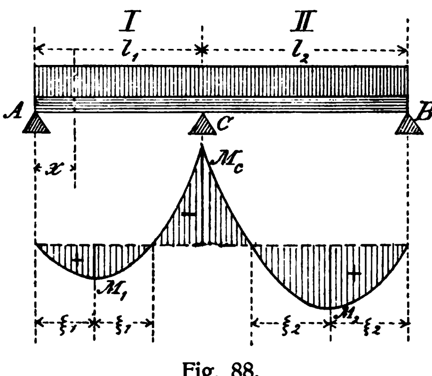


Fig. 88.

$$x = 2\xi_1 = \frac{2A}{p} = \frac{3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2}{4l_1}.$$

Der Maximiwert von M_x tritt ein für

$$x = \xi_1 = \frac{A}{p} = \frac{3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2}{8l_1}$$

und beträgt

$$(160) \qquad M_1 = A\xi_1 - \tfrac{1}{2} p\xi_1^2 = \frac{p\,(3l_1^2 + l_1 l_2 - l_2^2)^2}{128 l_1^2}.$$

In dem Felde II hat man zur Bestimmung des Wendepunktes

$$2\xi_2 = \frac{2B}{p} = \frac{3l_2^2 + l_1 l_2 - l_1^2}{4l_2},$$

ferner im Abstande ξ_2 von dem Ende B das maximale Moment

$$(161) \qquad M_2 = \frac{p\,(3l_2^2 + l_1 l_2 - l_1^2)^2}{128 l_2^2}.$$

Endlich findet man:

$$(162) \qquad |M_C| = |Al_1 - \tfrac{1}{2} pl_1^2| = \frac{p\,(l_1^2 + l_2^2 - l_1 l_2)}{8}.$$

Anwendungen.

1) Ein continuirlicher Balken aus Eichenholz auf drei Stützen hat zwei gleiche Felder von 3 m Länge und ist gleichförmig belastet mit 9000 kg. Es werden die Dimensionen des rechteckigen Querschnittes gesucht, wenn das Verhältnis zwischen Höhe und Breite $=4:3$ ist.

Wenn die Stützen in derselben Horizontalebene liegen, so ist das grösste Biegungsmoment (p. 123)

$$\max|M_x| = \tfrac{1}{8}\,\frac{9000}{600}\,300^2 = 168750 \text{ kg cm}.$$

Mit der zulässigen Biegungsdruckbeanspruchung

$$s'' = 66\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

folgt dann das erforderliche Widerstandsmoment des Querschnittes

$$\frac{J}{e} = \frac{168750}{66} = 2557 \text{ cm}^3.$$

Andererseits hat man

$$\frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\,bh^2 = \tfrac{1}{8}\,h^3,$$

hieraus folgt

$$h = 27.3 \text{ cm}, \quad b = \tfrac{3}{4}\,h = 20.5 \text{ cm}.$$

Wenn die Mittelstütze so viel gesenkt wird, dass man eine möglichst vorteilhafte Construction erhält (p. 125), so findet man

$$\max|M_x| = 0.08579\,\frac{9000}{600}\,300^2 = 115800 \text{ kg cm}$$

und

$$h = 24.1 \text{ cm}, \quad b = 18.1 \text{ cm},$$

sowie die hierzu erforderliche Senkung

$$h = 0.01307\,\frac{9000 \,.\, 300^4 \,.\, 12}{600 \,.\, 18.1 \,.\, 24.1^3 \; 117000} = 0.64 \text{ cm}.$$

Wäre der Balken bei C durchschnitten, so würde sich für jedes Feld

$$\max|M_x| = \tfrac{1}{8}\,\frac{9000}{600}\,300^2 = 168750 \text{ kg cm}$$

ergeben, und man erhielte dieselben Dimensionen wie im ersten Falle. Die Anwendung eines continuirlichen Balkens ist somit nur dann zweckmässig, wenn die Mittelstütze niedriger als die Seitenstützen genommen wird.

2) Ein continuirlicher gewalzter schmiedeiserner Balken hat drei Stützen in derselben Horizontalebene und zwei Felder von bez. 2.5 und 4 m Länge. Das Widerstandsmoment des I förmigen Querschnittes beträgt 500 cm³. Wie stark kann der Balken gleichförmig belastet werden?

Mit der zulässigen Spannung

$$s = 760 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

wird das grösste zulässige Biegungsmoment

$$\max |M_x| = 760 \,.\, 500 = 380000 \text{ kg cm.}$$

Setzt man jetzt in den Formeln auf p. 128 $l_1 = 2.5$ m, $l_2 = 4$ m, so ergiebt sich für die drei gefährlichen Querschnitte

$$\frac{M_1}{p} = 2032 \text{ cm}^2, \ \frac{M_2}{p} = 13080 \text{ cm}^2.$$

$$\frac{|M_C|}{p} = 15310 \text{ cm}^2.$$

Der letzte Wert ist der grösste und liefert

$$p = \frac{380000}{15310} = 24.8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \backsim 2.5 \frac{\text{ton.}}{\text{m}}.$$

Die totale Belastung des Balkens beträgt 16100 kg.

§ 14.

Aus der allgemeinen Theorie des continuirlichen Balkens.

Bezeichnungen.

Der continuirliche Balken, dessen Querschnitt constant vorausgesetzt wird, ruhe auf $k+1$ Stützpunkten und werde durch sie in k Felder mit den Feldweiten bez. $l_1, l_2 \ldots l_k$ eingeteilt (Fig. 89). Die Stützpunkte liegen im allgemeinen nicht gleich hoch; es seien aber die Höhen-

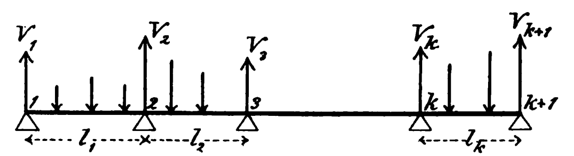


Fig. 89.

differenzen kleine Grössen von derselben Ordnung wie die Höhendifferenzen der verschiedenen Punkte der elastischen Linie. Die Belastung bestehe aus einem System von Einzellasten; die Reactionen V_1, $V_2 \ldots V_{k+1}$ an den Stützpunkten sind verticale, nach oben gerichtete Kräfte. Die Stützpunkte selbst werden als nicht elastisch betrachtet und behalten ihre Höhen unverändert bei.

Der Balken werde irgendwo durchschnitten (Fig. 90). Es besteht dann Gleichgewicht zwischen den am linken Balkenstück angreifenden Belastungen und Reactionen und den Spannungen im Querschnitte. Diese letzteren reduciren sich auf eine verticale Kraft (Q_x), welche in dem Querschnitte liegt und gleich und entgegengesetzt der Scherkraft Q_x ist, und ein Kräftepaar, dessen Moment $-M_x$ gleich und entgegengesetzt dem Biegungsmomente M_x für den Schnitt ist. Über dem n:ten Stützpunkte hat das Biegungsmoment einen Wert, welcher mit M_n bezeichnet werde. Die Grösse der Scherkraft unmittelbar links vom Stützpunkte sei Q_n', unmittelbar rechts davon habe sie den Wert Q_n'' (Fig. 91), sie werde positiv gerechnet, wenn sie nach oben gerichtet ist.

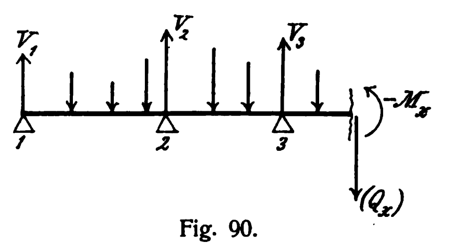


Fig. 90.

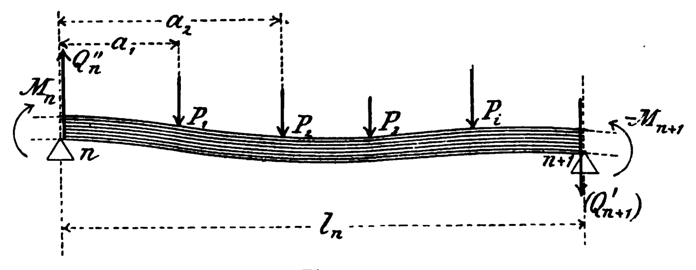


Fig. 91.

Auflager-reactionen. Die erste den continuirlichen Balken betreffende Aufgabe ist die Bestimmung der Reactionen $V_1, V_2 \ldots V_{k+1}$ in den Stützpunkten. Statt dieser Reactionen sucht man zweckmässigerweise zuerst die Biegungsmomente M_1, $M_2 \ldots M_{k+1}$ über den Stützpunkten, und leitet daraus die Reactionen ab. Zur Lösung der Aufgabe betrachtet man ein Stück des Balkens, welches begrenzt wird von einem Schnitte unmittelbar rechts vom n:ten und einem zweiten Schnitte unmittelbar links vom $n+1$:sten Stützpunkte (Fig. 91). Mit den Bezeichnungen in der Figur giebt die Momentengleichung bezogen auf einen Momentenpol auf der Verticalen des $n+1$:sten Stützpunktes

$$M_n - M_{n+1} + Q_n'' \, l_n - \sum_0^{l_n} P(l_n - a) = 0.$$

In Bezug auf einen Momentenpol auf der Verticalen des n:ten Stützpunktes erhält man

$$M_n - M_{n+1} + Q'_{n+1} \, l_n + \sum_0^{l_n} Pa = 0,$$

wobei die Bezeichnung $\sum_0^{l_n}$ angiebt, dass die Summation auf die sämtlichen Belastungen innerhalb des n:ten Feldes auszudehnen ist. Aus den obigen Gleichungen findet man die Scherkräfte neben den Stützpunkten

$$(163) \qquad \begin{aligned} Q_n'' &= \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + \frac{1}{l_n} \sum_0^{l_n} P(l_n - a), \\ Q'_{n+1} &= \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} - \frac{1}{l_n} \sum_0^{l_n} Pa, \end{aligned}$$

vorausgesetzt dass die Biegungsmomente $M_1, M_2 \ldots M_{k+1}$ bekannt sind. Alsdann erhält man die Reactionen selbst aus $k+1$ Gleichungen von der Form

$$(164) \qquad V_n = Q_n'' - Q_n'.$$

Momentengleichung von Clapeyron.

Zur Berechnung der Biegungsmomente über den Stützpunkten dienen die sog. Clapeyron'schen Momentengleichungen. Diese Gleichungen sind linear in Bezug auf die Biegungsmomente in drei auf einander folgenden Stützpunkten. Um sie herzuleiten, werden zwei auf einander folgende Felder l_{n-1} und l_n betrachtet (Fig. 92). Es werde eine horizontale x-Axe und eine verticale, nach oben gerichtete y-Axe angenommen. Ferner

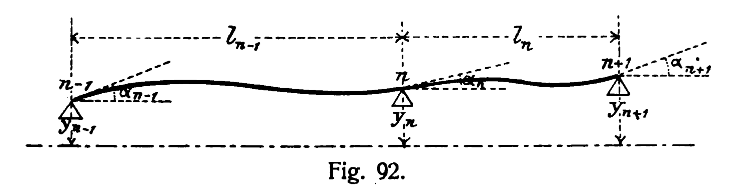


Fig. 92.

sei y_n die Ordinate des n:ten Stützpunktes und α_n der Neigungswinkel der Tangente der elastischen Linie über dem Stützpunkte gegen die Horizontale.

Man kann sich das Stück l_n links unter dem Winkel α_n gegen die x-Axe eingespannt (Fig. 93) und unmittelbar links vom Stützpunkte $n+1$ durchschnitten denken.

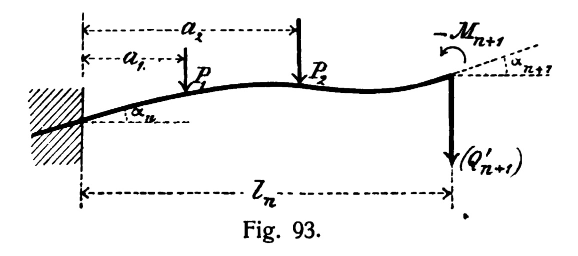


Fig. 93.

Drückt man dann die Bedingung aus, dass das rechte Ende unter dem Einflusse der innerhalb des Feldes wirkenden Belastungen, der entgegengesetzt genommenen Scherkraft (Q'_{n+1}) und des entgegengesetzt genommenen Biegungsmomentes $-M_{n+1}$ gegen das linke Ende die Erhöhung $y_{n+1} - y_n$ aufweist, während die Tangente der elastischen Linie die Neigung α_{n+1} hat, so erhält man

die Gleichungen (vergl. die Formeln 133, 135, 124 und 126 [1])

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{M_{n+1}\, l_n}{JE} - \frac{Q'_{n+1}\, l_n^2}{2JE} - \sum_0^{l_n} \frac{Pa^2}{2JE},$$

$$y_{n+1} - y_n = l_n\, \alpha_n + \frac{M_{n+1}\, l_n^2}{2JE} - \frac{Q'_{n+1}\, l_n^3}{3JE} - \sum_0^{l_n} \frac{P(3l_n - a)a^2}{6JE}.$$

Wenn man ferner den auf p. 132 gefundenen Wert von Q'_{n+1} hier einsetzt, so erhält man mit kleinen Abänderungen

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{M_{n+1} + M_n}{2JE}\, l_n + \frac{1}{2JE} \sum_0^{l_n} Pa\,(l - a),$$

(165)

$$\alpha_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} - \frac{M_{n+1} + 2M_n}{6JE}\, l_n - \frac{1}{6JE}\frac{1}{l_n} \sum_0^{l_n} Pa(l - a)(2l - a),$$

wobei unter dem Zeichen Σ der Kürze wegen nur l statt l_n geschrieben wurde. Wird n durch $n - 1$ ersetzt, so folgt aus den Gleichungen (165)

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{M_n + M_{n-1}}{2JE}\, l_{n-1} + \frac{1}{2JE} \sum_0^{l_{n-1}} Pa(l - a),$$

(166)

$$\alpha_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_{n-1}} - \frac{M_n + 2M_{n-1}}{6JE}\, l_{n-1} - \frac{1}{6JE}\frac{1}{l_{n-1}} \sum_0^{l_{n-1}} Pa(l - a)(2l - a).$$

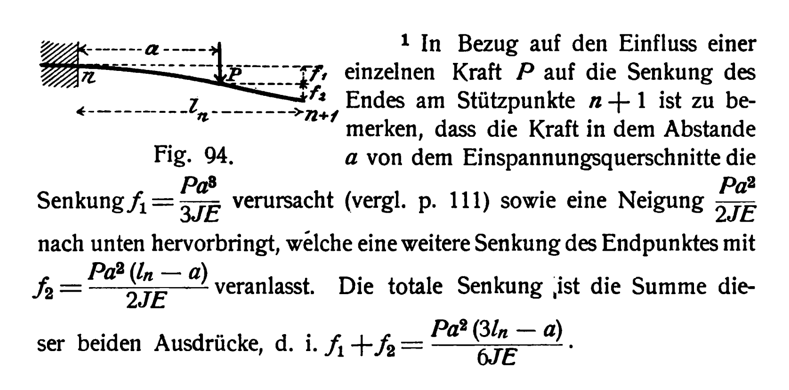


Fig. 94.

[1] In Bezug auf den Einfluss einer einzelnen Kraft P auf die Senkung des Endes am Stützpunkte $n + 1$ ist zu bemerken, dass die Kraft in dem Abstande a von dem Einspannungsquerschnitte die Senkung $f_1 = \frac{Pa^3}{3JE}$ verursacht (vergl. p. 111) sowie eine Neigung $\frac{Pa^2}{2JE}$ nach unten hervorbringt, welche eine weitere Senkung des Endpunktes mit $f_2 = \frac{Pa^2\,(l_n - a)}{2JE}$ veranlasst. Die totale Senkung ist die Summe dieser beiden Ausdrücke, d. i. $f_1 + f_2 = \frac{Pa^2\,(3l_n - a)}{6JE}$.

Endlich folgt aus den drei letzten Gleichungen die Clapeyronsche Momentengleichung durch Elimination von a_{n-1} und a_n nach einfacher Reduction in der Form

$$M_{n-1} l_{n-1} + 2M_n (l_{n-1} + l_n) + M_{n+1} l_n = 6JE\left\{\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} - \frac{y_n - y_{n-1}}{l_{n-1}}\right\}$$

(167)

$$-\frac{1}{l_{n-1}}\sum_0^{l_{n-1}} Pa\,(l-a)\,(l+a) - \frac{1}{l_n}\sum_0^{l_n} Pa\,(l-a)\,(2l-a).$$

Das vorletzte Glied enthält sämtliche Belastungen des $n-1$:sten, das letzte Glied sämtliche Belastungen des n:ten Feldes.

Die Gleichung (167), in der nur die drei Stützenmomente M_{n-1}, M_n und M_{n+1} unbekannt sind, gilt von $n=2$ bis $n=k$. Man erhält also $k-1$ Gleichungen zwischen den $k+1$ unbekannten $M_1, M_2 \ldots M_{k+1}$. Die zwei noch erforderlichen Gleichungen ergeben sich, wenn man die Auflagerung des Balkens an den beiden Enden betrachtet. Wenn der Balken an beiden Enden frei aufliegt, so hat man $M_1 = 0$ und $M_{k+1} = 0$. Wenn der Balken dagegen an beiden Enden unter den gegebenen Neigungswinkeln a_1 und a_{k+1} eingespannt ist, so findet man die Gleichungen

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_1} - \frac{M_2 + 2M_1}{6JE} l_1 - \frac{1}{6JE}\frac{1}{l_1}\sum_0^{l_1} Pa\,(l-a)\,(2l-a),$$

(168)

$$a_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{l_k} + \frac{2M_{k+1} + M_k}{6JE} l_k + \frac{1}{6JE}\frac{1}{l_k}\sum_0^{l_k} Pa\,(l-a)(l+a),$$

von welchen die erstere aus der zweiten Gleichung (165) für $n=1$ hervorgeht, während man die letztere dadurch erhält, dass man a_{n-1} zwischen den beiden Gleichungen (166) eliminirt und dann $n=k+1$ setzt.

Der Kürze wegen sollen die rechten Seiten der Gleichung (167) und der analogen Gleichungen mit R_1,

$R_2 \ldots R_{k+1}$ bezeichnet werden. Sie stellen bekannte Grössen dar. Das System der Gleichungen ist dann

$$
\begin{aligned}
& 2M_1 l_1 + M_2 l_1 = R_1, \\
& M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = R_2, \\
& M_2 l_2 + 2M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = R_3, \\
& \cdots\cdots\cdots \\
(169) \quad & M_{n-1} l_{n-1} + 2M_n (l_{n-1} + l_n) + M_{n+1} l_n = R_n, \\
& M_n l_n + 2M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} = R_{n+1}, \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& M_{k-1} l_{k-1} + 2M_k (l_{k-1} + l_k) + M_{k+1} l_k = R_k, \\
& M_k l_k + 2M_{k+1} l_k = R_{k+1}.
\end{aligned}
$$

In Bezug auf die erste und die letzte dieser Gleichungen beachte man, dass sie nicht erforderlich sind, wenn $M_1 = M_{k+1} = 0$ ist, weil man dann $k - 1$ Gleichungen zwischen den $k - 1$ unbekannten Momenten $M_2 \ldots M_k$ hat; sind M_1 und M_{k+1} von Null verschieden, so werden R_1 und R_{k+1} aus den Gleichungen (168) berechnet, in welchen α_1 und α_{k+1} bekannte vorgeschriebene Werte haben.

Bei der Lösung des Gleichungssystemes (169) in Bezug auf $M_1, M_2 \ldots M_{k+1}$ bedient man sich am besten der Lagrange'schen Methode der unbestimmten Multiplicatoren. Die Gleichungen werden der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{k+1}$ multiplicirt und addirt. Es ergiebt sich dann

$$
\begin{aligned}
M_1 (2l_1\lambda_1 + l_1\lambda_2) + M_2 \{l_1\lambda_1 + 2(l_1 + l_2)\lambda_2 + l_2\lambda_3\} + \ldots \\
+ M_n \{l_{n-1}\lambda_{n-1} + 2(l_{n-1} + l_n)\lambda_n + l_n \lambda_{n+1}\} + \ldots \\
+ M_{k+1} (l_k \lambda_k + 2l_k \lambda_{k+1}) = \sum_1^{k+1} (R_n \lambda_n).
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung von M_n sind die Multiplicatoren aus dem Gleichungssysteme

$$
\begin{aligned}
& 2l_1\lambda_1 + l_1\lambda_2 = 0, \\
& l_1\lambda_1 + 2(l_1 + l_2)\lambda_2 + l_2\lambda_3 = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

(170) $l_{n-1}\lambda_{n-1} + 2(l_{n-1} + l_n)\lambda_n + l_n\lambda_{n+1} = 1,$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_k\lambda_k + 2l_k\lambda_{k+1} = 0$$

zu berechnen und dann in den Ausdruck

(171) $$M_n = \sum_1^{k+1}(R_n\lambda_n)$$

einzusetzen.

Weil das Gleichungssystem (169) linear ist und immer eine bestimmte Lösung besitzt, so wird M_n eindeutig durch die Formel (171) gegeben. Dasselbe gilt in Bezug auf die anderen Stützenmomente.

Biegungsmoment in einem Querschnitte.

Nachdem die Biegungsmomente über den Stützpunkten berechnet worden sind, erhält man in einfacher Weise das Biegungsmoment für einen beliebigen Querschnitt. Wenn nur einzelne Lasten wirken, so wird die Momentenfläche von geraden Linien begrenzt; das Biegungsmoment zwischen zwei Kräften ist eine ganze Function ersten Grades von x, welche sich ändert, wenn eine Belastungsstelle überschritten wird. Würden keine Belastungen innerhalb des n:ten Feldes vorkommen (Fig. 95), so erhielte man in dem durch den Abstand x von n bestimmten Schnitte das Biegungsmoment

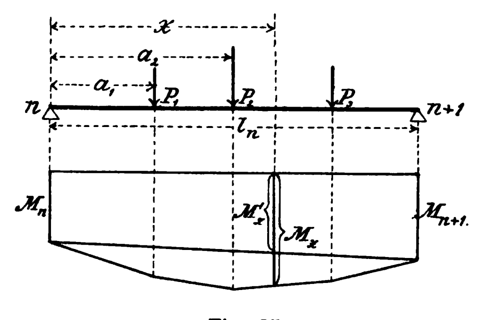


Fig. 95.

$$M_x' = M_n + \frac{x}{l_n}(M_{n+1} - M_n).$$

Eine Kraft P im Abstande a von n giebt in diesem Stützpunkte die Reaction

$$\frac{l_n - a}{l_n} P,$$

deren Moment in Bezug auf den betrachteten Querschnitt $\frac{x}{l_n} P(l_n - a)$ ist. Wenn die Kraft P links vom Schnitte liegt, so giebt sie ausserdem das directe Moment $-P(x-a)$ in Bezug auf den Schnitt. Für das Biegungsmoment M_x im Schnitte x folgt schliesslich

$$M_x = M_n + \frac{x}{l_n}(M_{n+1} - M_n) + \frac{x}{l_n}\sum_0^{l_n} P(l_n - a) - \sum_0^x P(x-a).$$

Grösstes Biegungsmoment.

Das Biegungsmoment $|M_x|$ ist am grössten, entweder über einem Stützpunkte oder in einem Querschnitte, wo eine Belastung P wirkt. Wenn die Belastung des continuirlichen Balkens gegeben ist, so sind bei der Dimensionirung die sämtlichen erwähnten Querschnitte in Betracht zu ziehen und derjenige auszuwählen, in welchem $|M_x|$ am grössten ist. Umgekehrt könnte man die Frage aufwerfen, wie die Belastungen an dem continuirlichen Balken anzubringen sind, damit sich in einem Querschnitte ein grösstes Biegungsmoment ergebe. Bei den praktischen Anwendungen kommt diese letzte Aufgabe oft in Betracht, wird aber hier nicht weiter verfolgt.

Gleichförmige Belastung der einzelnen Felder.

Aus den obigen Formeln, welche in einzelnen Punkten angreifende Belastungen des continuirlichen Balkens voraussetzen, leitet man in ähnlicher Weise wie in § 13 2) und 3) Formeln für den Fall ab, dass die Belastung der einzelnen Felder eine continuirliche ist. Es werde angenommen, dass die Belastung jedes Feldes das ganze Feld gleichförmig bedecke und im n:ten Felde p_n pro Längeneinheit betrage. Statt der auf der rechten Seite der Clapeyron'schen Gleichung (167) enthaltenen Summen treten jetzt bestimmte Integrale:

$$\sum_0^{l_{n-1}} Pa\,(l-a)\,(l+a) = \int_0^{l_{n-1}} p_{n-1}\, a(l^2-a^2)\, da = p_{n-1}\frac{l_{n-1}{}^4}{4},$$

$$\sum_0^{l_n} Pa\,(l-a)(2l-a) = \int_0^{l_n} p_n\, a(l-a)\,(2l-a)\, da = p_n \frac{l_n{}^4}{4}$$

und die Clapeyron'sche Momentengleichung geht in

$$(173)\quad M_{n-1}\, l_{n-1} + 2M_n\,(l_{n-1}+l_n) + M_{n+1}\, l_n = 6JE\left\{\frac{y_{n+1}-y_n}{l_n} - \frac{y_n-y_{n-1}}{l_{n-1}}\right\} - \tfrac{1}{4}\left\{p_{n-1}\, l_{n-1}{}^3 + p_n\, l_n{}^3\right\}$$

über. Die Gleichung (172) liefert für das Biegungsmoment in einem beliebigen Schnitte des n:ten Feldes den Wert

$$(174)\quad M_x = \frac{M_n\,(l_n-x) + M_{n+1}\,x}{l_n} + \tfrac{1}{2} p_n\, x\,(l_n-x).$$

Die Momentenfläche wird innerhalb jedes Feldes von einer Parabel mit verticaler Axe begrenzt. Der Scheitel der Parabel hat vom linken Stützpunkte den Abstand

$$\xi = \tfrac{1}{2} l_n + \frac{M_{n+1}-M_n}{p_n\, l_n}$$

und das Biegungsmoment im Scheitelquerschnitte ist

$$(175)\quad M_\xi = \tfrac{1}{8} p_n\, l_n{}^2 + \tfrac{1}{2}(M_n + M_{n+1}) + \tfrac{1}{2}\,\frac{(M_n - M_{n+1})^2}{p_n\, l_n{}^2}.$$

Bei der Dimensionirung werden diese k Scheitelmomente und die $k+1$ Biegungsmomente über den Stützpunkten mit einander verglichen.

Die allgemeinen Gleichungen (163) liefern in dem jetzt betrachteten Falle die Scherkräfte

$$(176)\quad Q_n' = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_{n-1}} - \frac{p_{n-1}\, l_{n-1}}{2},$$

(176) $$Q_n'' = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + \frac{p_n l_n}{2},$$

es folgt hieraus die Reaction am n:ten Auflager

(177) $$V_n = Q_n'' - Q_n' = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_{n-1}} + \\ + \tfrac{1}{2}(p_{n-1} l_{n-1} + p_n l_n).$$

Gleichförmige Belastung des ganzen Balkens. In dem noch specielleren Falle, in welchem der Balken in seiner ganzen Länge mit p pro Längeneinheit gleichförmig belastet ist, alle Felder dieselbe Länge l haben und alle Stützen gleich hoch liegen, erhält man die Gleichungen

$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = -\tfrac{1}{2} p l^2,$$

(178) $$\xi = \tfrac{1}{2} l + \frac{M_{n+1} - M_n}{pl},$$

$$M_\xi = \tfrac{1}{8} p l^2 + \tfrac{1}{2}(M_n + M_{n+1}) + \tfrac{1}{2}\frac{(M_n - M_{n+1})^2}{p l^2},$$

$$V_n = pl + \frac{M_{n+1} - 2M_n + M_{n-1}}{l}.$$

Die ganze Anordnung ist symmetrisch in Bezug auf die Mitte des Balkens, so dass die Werte nur für die eine Hälfte ausgerechnet zu werden brauchen.

Anwendungen.

1) ***Balken mit drei gleich langen Feldern, alle Stützen in derselben Höhe und gleichförmige Belastung.***

Weil $M_1 = M_4 = 0$ und $M_2 = M_3$ ist (Fig. 96), braucht man nur eine Clapeyronsche Gleichung

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = -\tfrac{1}{2} p l^2,$$

hieraus folgt

$$M_2 = M_3 = -\tfrac{1}{10} p l^2.$$

Ferner findet man für das erste und dritte Feld $\xi = \frac{2}{5}\, l$ sowie

$$M_\xi = \frac{2}{25}\, pl^2$$

und für das Mittelfeld

$$M_{\frac{l}{2}} = \tfrac{1}{40}\, pl^2.$$

Bei der Dimensionirung wird der Wert $|M_2| = |M_3| = \frac{1}{10}\, pl^2$ benützt. Die Reactionen in den Stützpunkten betragen

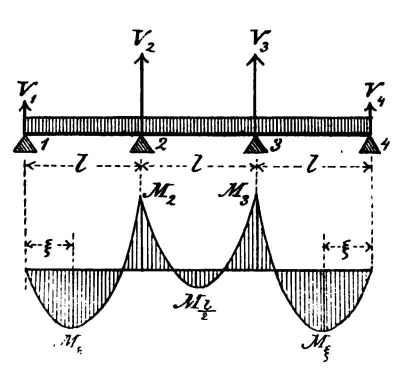


Fig. 96.

$$V_1 = V_4 = \tfrac{2}{5}\, pl,$$
$$V_2 = V_3 = \tfrac{11}{10}\, pl.$$

Die Wendepunkte der äusseren Felder liegen in dem Abstande $2\xi = \frac{4}{5}\, l$ von den Endstützen und in dem Mittelfelde in dem Abstande

$$\left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{20}}\right) l = 0.2764\, l$$

von dem nächsten Stützpunkte.

2) *Wie sind die mittleren Stützen eines gleichförmig belasteten continuirlichen Balkens mit drei Feldern anzubringen, damit die Beanspruchung in allen fünf gefährlichen Querschnitten dieselbe werde?*

Es seien l' die Länge des mittleren Feldes, l die Länge der beiden gleichen Seitenfelder, ferner h die Senkung der beiden mittleren Stützen unter der Horizontalebene durch die Endstützen, M sei der numerische Wert der fünf gleich grossen Biegungsmomente. Aus der Gleichung (173) folgt dann

$$M\,(2l + 3l') = \tfrac{1}{4}\, p(l^3 + l'^3) - 6JE\,\frac{h}{l},$$

während die Gleichung (175) für die beiden äusseren Felder

$$\frac{M^2}{pl^2} - 3M + \tfrac{1}{4}\, pl^2 = 0$$

und für das mittlere Feld

$$2M = \tfrac{1}{8}\, pl'^2$$

liefert. Das Resultat der Auflösung dieser Gleichungen ist

$$l' = 1.1716\, l;\ \ l = 0.8536\, l'.$$

Führt man die mittlere Länge λ eines Feldes ein, wobei also

$$\lambda = \frac{2l + l'}{3}$$

ist, so erhält man

$$l = 0.9459\,\lambda;\; l' = 1.1082\,\lambda,$$

ferner

$$h = 0.02387\,\frac{p\lambda^4}{JE},$$

$$M = 0.07676\,p\lambda^2.$$

Durch die hier betrachtete Anordnung der Stützpunkte ist die Tragkraft des Balkens im Vergleich mit der unter 1) behandelten Anordnung ungefähr in dem Verhältnisse 1.3 : 1 gewachsen.

§ 15.

Biegung nicht prismatischer, gerader Balken.

A. Allgemeine Formeln.

Allgemeine Formeln.

Bei der Ableitung der in § 12 erhaltenen Ausdrücke für die Spannung in der äussersten Faser eines geraden prismatischen Balkens und für den Krümmungsradius der elastischen Linie desselben, d. h.

$$\sigma = \frac{e}{J} M_x$$

und

$$\varrho = \frac{JE}{M_x}$$

wurde vorausgesetzt, dass der Balken aus Längsfasern zusammengesetzt sei. Dieselbe Ableitung gilt noch mit genügender Annäherung für einen geraden Balken, dessen Form nicht allzu viel von der prismatischen Form abweicht und dessen Länge im Verhältnis zu den Querdimensionen bedeutend ist. Die Grössen J und e sind dann von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich; dies

soll durch einen beigefügten Index x angedeutet werden. Man erhält also die Formeln

$$\sigma = \frac{e_x}{J_x} M_x, \tag{179}$$

$$\varrho = \frac{J_x E}{M_x}; \tag{180}$$

die erste bezieht sich auf die Spannung; die zweite auf die Formänderung.

Dimensionirung. In dem sog. gefährlichen Querschnitte ist $|\sigma|$ am grössten. Man findet diesen Querschnitt, wenn man das Maximum der Grösse

$$\left| \frac{e_x}{J_x} M_x \right|$$

aufsucht. Bei der Dimensionirung wird die Gleichung

$$s = \max \left| \frac{e_x}{J_x} M_x \right| \tag{181}$$

benützt, wo s die zulässige Spannung ist, und nötigenfalls die Zugseite und Druckseite des gefährlichen Querschnittes besonders in Betracht gezogen werden müssen.

Elastische Linie. Die Differentialgleichung der elastischen Linie (vergl. p. 109)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{J_x E} \tag{182}$$

liefert durch eine erste Integration

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{M_x}{J_x} dx + C_1 \tag{183}$$

und nach einer zweiten Integration

$$y = \frac{1}{E} \int dx \int \frac{M_x}{J_x} dx + C_1 x + C_2. \tag{184}$$

Die Wendepunkte der elastischen Linie werden wie am prismatischen Balken durch die Gleichung

$$M_x = 0$$

bestimmt; die Punkte mit der grössten Durchbiegung ergeben sich mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

insofern sie nicht an freien Enden des Balkens vorkommen.

Anwendungen.

1) *Ein an beiden Enden frei aufliegender, gleichförmig belasteter Balken besitzt einen rechteckigen Querschnitt von constanter Breite und gleichförmig von dem einen Ende nach dem anderen zunehmender Höhe* (Fig. 97). *Der Balken soll dimensionirt werden.*

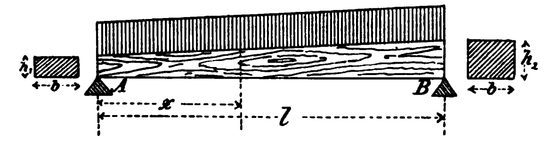


Fig. 97.

Der Querschnitt in dem Abstande x von dem Ende A hat die Höhe

$$h_x = 2e_x = h_1 + \frac{x}{l}(h_2 - h_1) = \frac{(l-x)\,h_1 + xh_2}{l}.$$

Das Widerstandsmoment dieses Querschnittes beträgt

$$\frac{J_x}{e_x} = \tfrac{1}{6}\,bh_x^{\,2} = \tfrac{1}{6}\,\frac{b}{l^2}\left\{(l-x)\,h_1 + x\,h_2\right\}^2.$$

Das Biegungsmoment ist

$$M_x = \frac{px\,(l-x)}{2}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{e_x}{J_x}\,M_x = \frac{3pl^2}{b}\,\frac{x(l-x)}{\left\{(l-x)\,h_1 + x\,h_2\right\}^2}.$$

Die Function

$$f(x) = \frac{x(l-x)}{\left\{(l-x)h_1 + x h_2\right\}^2}$$

soll jetzt zu einem Maximum gemacht werden. Setzt man $f'(x) = 0$, so findet man

$$\left\{(l-x)h_1 + xh_2\right\}(l-2x) - 2x(l-x)(h_2 - h_1) = 0$$

und

$$x = \frac{h_1}{h_1 + h_2} l.$$

Der zu diesem Querschnitt gehörende grösste Wert von $f(x)$ ist

$$\max f(x) = \frac{1}{4h_1h_2}\cdot$$

Bei der Dimensionirung wird die Gleichung

$$\frac{h_1h_2}{l^2} = \frac{3p}{4bs}$$

benützt.

2) *Ein langgestreckter abgestumpfter Kreiskegel mit horizontaler Axe ist am dickeren Ende eingespannt und am anderen Ende belastet. Die grösste Durchbiegung soll berechnet werden.*

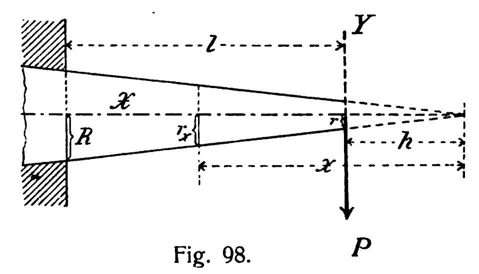


Fig. 98.

Mit den Bezeichnungen der Figur 98 findet man

$$M_x = -P(x-h),$$

$$J_x = \frac{\pi}{4} r_x^4 = \frac{\pi R^4 x^4}{4(l+h)^4}\cdot$$

$$-\frac{M_x}{J_x} = \frac{4P(l+h)^4}{\pi R^4}\,\frac{x-h}{x^4}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4P(l+h)^4}{E\pi R^4}\int_{l+h}^{x} \frac{x-h}{x^4}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{P(l+h)^4}{E\pi R^4}\left\{\frac{3}{(l+h)^2} - \frac{2h}{(l+h)^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2h}{x^3}\right\}.$$

$$y = -\frac{2}{3}\frac{P(l+h)^4}{E\pi R^4}\int_h^x\left\{\frac{3}{(l+h)^2} - \frac{2h}{(l+h)^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2h}{x^3}\right\}dx.$$

$$f = -\frac{2}{3}\frac{P(l+h)^4}{E\pi R^4}\int_h^{h+l}\left\{\frac{3}{(l+h)^2} - \frac{2h}{(l+h)^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2h}{x^3}\right\}dx.$$

$$f = \frac{4}{3}\frac{P(l+h)\,l^3}{h\pi R^4 E}.$$

Setzt man noch

$$h = \frac{r}{R-r}\,l$$

ein, so ergiebt sich

$$f = \frac{4}{3\pi}\frac{Pl^3}{R^3 r E}.$$

Für $r = R$ folgt daraus

$$f = \frac{4}{3\pi}\frac{Pl^3}{R^4 E} = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{JE}$$

in Übereinstimmung mit der Formel (126).

B. **Balken gleicher Biegungsfestigkeit.**

Balken gleicher Biegungsfestigkeit.

Unter einem Balken gleicher Biegungsfestigkeit versteht man einen auf Biegung beanspruchten Balken, in dessen sämtlichen Querschnitten die grösste Normalspannung die gleiche ist. Ein derartiger Balken bietet im Verhältnis zu einem prismatischen Balken einen bedeutenden Materialgewinn dar, und zwar deswegen, weil die grösste Spannung sämtlicher Querschnitte gleich der zulässigen Spannung gemacht werden kann. Zur Berechnung der Form eines Balkens gleicher Biegungsfestigkeit dient die Gleichung

$$\frac{J_x}{e_x} = \frac{|M_x|}{s}; \tag{185}$$

in erster Linie liefert sie die Abhängigkeit des Widerstandsmomentes des Querschnittes von dessen Lage.

Beispiele.

Ein Balken sei an einem Ende eingespannt, an dem anderen durch eine Kraft P belastet; sein Querschnitt sei ein Rechteck mit der Grundlinie y und der Höhe z (Fig. 99). Mit Hülfe der Gleichung (185) erhält man dann

$$\tfrac{1}{6} y z^2 = \frac{Px}{s}.$$

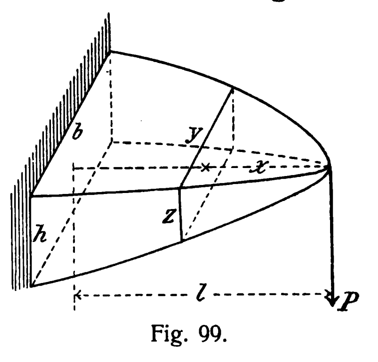


Fig. 99.

Bezeichnet man die Breite und Höhe des Querschnittes am eingespannten Ende mit b und h, so ergiebt sich ferner

$$\tfrac{1}{6} b h^2 = \frac{Pl}{s} \tag{186}$$

und

$$y z^2 = \frac{bh^2}{l} x. \tag{187}$$

Damit die Querschnittsabmessungen völlig bestimmt werden können, muss eine Beziehung zwischen der Breite und der Höhe gegeben sein. Verlangt man, dass sämtliche Querschnitte einander ähnlich seien, so erhält man

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{h};$$

mit Hülfe der Gleichung (187) folgt dann

$$y = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}\, b; \quad z = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}\, h. \tag{188}$$

Die Begrenzungscurven der horizontalen und verticalen Längendurchschnitte des Balkens sind cubische Parabeln. Die Gleichung (186) dient zur Dimensionirung.

Wenn die Breite z des Querschnittes unveränderlich gleich b ist, so folgt aus der Gleichung (187)

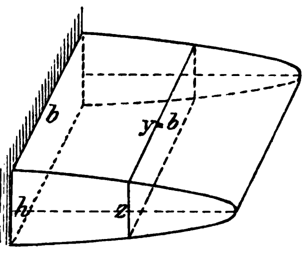


Fig. 100.

$$z = \sqrt{\frac{x}{l}}\, h. \tag{189}$$

Der Durchschnitt des Balkens mit seiner verticalen Symmetrieebene ist dann eine gewöhnliche Parabel (Fig. 100).

Bleibt die Höhe z des Querschnittes unverändert gleich h, so erhält man mit Hülfe der Gleichung (187)

$$y = \frac{b}{l}\, x. \tag{190}$$

Der Balken hat dann die Form eines Keiles (Fig. 101).

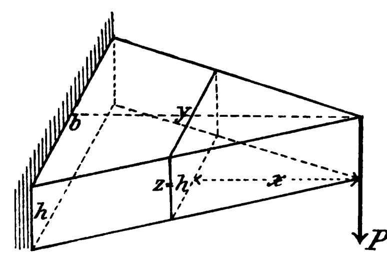


Fig. 101.

Der Balken sei wieder an einem Ende eingespannt und am anderen belastet. Der Querschnitt sei kreisförmig (Fig. 102). Vermittelst der Gleichung (185) findet man dann

$$\tfrac{1}{4}\pi r_x^3 = \frac{Px}{s}$$

und

$$\tfrac{1}{4}\pi R^3 = \frac{Pl}{s}.$$

Daraus ergiebt sich

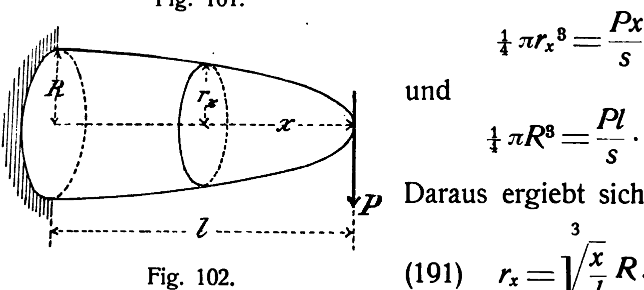


Fig. 102.

$$r_x = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}\, R. \tag{191}$$

Die Meridiancurve ist eine cubische Parabel. Zur Dimensionirung hat man

(192) $$R = \sqrt[3]{\frac{4Pl}{\pi s}}.$$

Für einen an beiden Enden frei aufliegenden, gleichförmig belasteten Balken mit rechteckigem Querschnitt

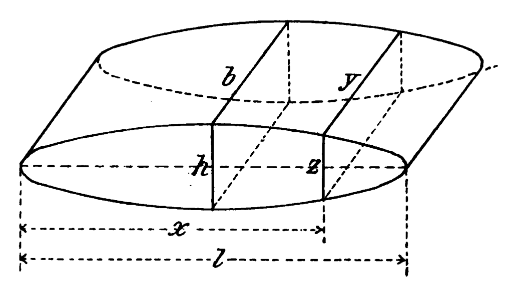


Fig. 103.

liefert die Gleichung (185) mit Anwendung der Bezeichnungen der Fig. 103 die Gleichungen

$$\tfrac{1}{6} yz^2 = \frac{px(l-x)}{2s}$$

und

$$\tfrac{1}{6} bh^2 = \frac{pl^2}{8s}.$$

Daraus folgt

(193) $$yz^2 = \frac{4x(l-x)}{l^2} bh^2.$$

Sind die Querschnitte einander ähnlich, so erhält man

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{h}$$

und

(194) $$y = \sqrt[3]{\frac{4x(l-x)}{l^2}}\, b;\; z = \sqrt[3]{\frac{4x(l-x)}{l^2}}\, h.$$

Die Begrenzungslinien in den beiden Symmetrieebenen sind dann Curven dritter Ordnung. Die Dimensionirung

des mittleren Querschnittes geschieht auf Grund der Gleichung

$$bh^2 = \frac{3}{4} \frac{pl^2}{s}. \tag{195}$$

Unter der Voraussetzung einer constanten Breite des Querschnittes findet man

$$z = 2 \frac{\sqrt{x(l-x)}}{l} h. \tag{196}$$

Ein verticaler Längenschnitt des Balkens wird dann von einer Ellipse mit den Halbaxen $\frac{l}{2}$ und $\frac{h}{2}$ begrenzt (Fig. 103).

Wenn die Höhe constant ist, so folgt aus der Gleichung (193)

$$y = \frac{4x(l-x)}{l^2} b, \tag{197}$$

und die Begrenzungslinien der horizontalen Schnitte sind gewöhnliche Parabeln (Fig. 104).

In Wirklichkeit formt man die Balken nicht genau nach den jetzt gefundenen Begrenzungscurven, sondern man sucht ihnen nur eine Form angenähert gleicher Biegungsfestigkeit zu erteilen. Beispielsweise kann eine Begrenzungscurve durch eine aus einigen Tangenten der Curve gebildete gebrochene Linie und eine krumme Begrenzungsfläche durch einige Ebenen oder einige kegelförmige Flächen u. s. w. ersetzt werden. Natürlich dürfen die Enden der Balken nicht so scharf sein, wie die strenge Form verlangt; man muss

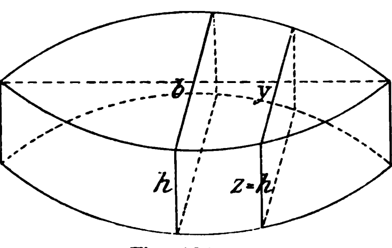


Fig. 104.

die Endquerschnitte so gross machen, dass kein Abscheren durch im Querschnitte selbst liegende Kräfte eintreten kann.

Anwendungen.

Welle gleicher Festigkeit.

1) Eine Maschinenwelle, die ein Umdrehungskörper ist, ruhe in zwei Lagern A und B (Fig. 105) und sei in einem Querschnitte C durch eine Kraft P belastet. In den Lagern entstehen die Reactionen

$$A = \frac{l_2}{l} P,$$

$$B = \frac{l_1}{l} P.$$

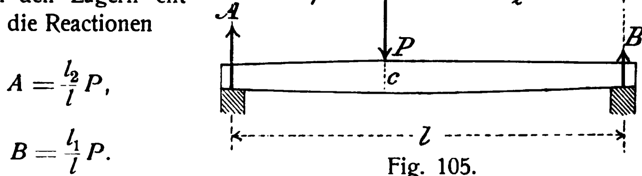


Fig. 105.

Um die Welle als einen Körper gleicher Biegungsfestigkeit zu construiren, denkt man sie sich bei C eingespannt und wendet auf die beiden Teile die Gleichungen (191) und (192) direct an. Die Begrenzungscurven eines Längendurchschnitts sind cubische Parabeln (Fig. 106) mit den Gleichungen

Fig. 106.

$$r_1 = \tfrac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{x_1}{l_1}}\, d, \qquad (198)$$

$$r_2 = \tfrac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{x_2}{l_2}}\, d.$$

Die Dimensionirung des Querschnittes bei C geschieht mit Hülfe der Gleichung

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 A l_1}{\pi s}} = \sqrt[3]{\frac{32 B l_2}{\pi s}} = \sqrt[3]{\frac{32 P l_1 l_2}{\pi s l}}. \qquad (199)$$

Bei der Ausführung setzt man die Welle z. B. aus drei abgestumpftkegelförmigen Teilen und den beiden cylindrischen Zapfen zusammen.

Berechnung der Zapfen. Die Zapfen werden als an einem Ende eingespannte Körper berechnet, die durch den auf die ganze Zapfenlänge gleichförmig verteilten Lagerdruck auf Biegung beansprucht werden; wenigstens ist diese Annahme für einen eingelaufenen Zapfen berechtigt: Für den linken Zapfen der betrachteten Welle ergiebt sich also (Fig. 107)

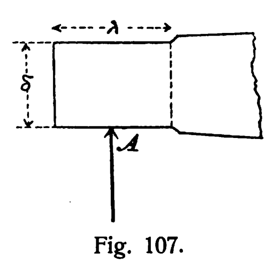


Fig. 107.

$$\frac{A\lambda}{2} = \frac{\pi}{32}\delta^3 s.$$

In der Praxis wird gewöhnlich das Verhältnis

$$\frac{\lambda}{\delta} = \alpha$$

nach empirischen Regeln bestimmt, wobei man beachtet, dass der Druck pro Flächeneinheit zwischen Zapfen und Lager nicht zu gross sein darf um nicht eine befriedigende Schmierung zu verhindern und um den Zapfen nicht in Gefahr zu bringen, abgenutzt zu werden, und dass die Wärme, welche durch die Reibungsarbeit erzeugt wird, genügend schnell weggeleitet wird, so dass der Zapfen nicht in Gefahr kommt warm zu laufen. Nachdem α bestimmt worden ist, findet man den Zapfendurchmesser mit Hülfe der Formel

$$\delta = \sqrt{\frac{16\alpha A}{\pi s}}. \tag{200}$$

Bei nicht zu grossen Umlaufsgeschwindigkeiten nimmt man für Eisen- und Stahlzapfen $\alpha = 1.3$ bis 1.4 an.

Blattfeder. 2) Der in Figur 101 dargestellte keilförmige Balken hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Nach der Gleichung (180) ist der Krümmungsradius in einem Punkte der elastischen Linie

$$\varrho = \tfrac{1}{12} y h^3 \frac{E}{Px} = \frac{bh^3E}{12Pl}, \tag{201}$$

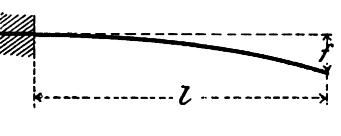


Fig. 108.

d. h. constant; die elastische Linie ist also ein Kreis.

Für die Durchbiegung f (Fig. 108) des freien Endes ergiebt sich genügend genau

$$f = \frac{l^2}{2\varrho} = \frac{6Pl^3}{bh^3E}. \tag{202}$$

Die Keilform kommt oft bei Federconstructionen vor. Die Formel (202) zeigt, dass die Feder um so weicher ist, je kleiner die Dicke h ist.

Um gleichzeitig eine genügende Tragkraft der Feder zu erhalten, muss man die Breite b relativ gross wählen. Eine allzu breite Feder wäre aber oft unbequem. Man vermeidet dies, wenn man die Feder in gleich breite Lamellen zerschneidet, die über einander gelegt werden, wie z. B. bei den Federn der Fuhrwerke. Wenn die Enden der Federn ein wenig nach aufwärts hinaufgebogen werden, so dass der Druck zwischen den Lamellen an ihnen übertragen wird, so besitzt das erhaltene Federbüschel die gleiche Tragkraft und das gleiche Federungsvermögen wie die einfache Feder. Es sei n die Anzahl der Lamellen; mit den Bezeichnungen der Figur 109 ergiebt sich für das Biegungsmoment im Schnitte x der ersten Lamelle

$$|M_x| = \frac{Pl}{n};$$

das Widerstandsmoment ist

$$\frac{J_x}{e_x} = \frac{b}{n}\frac{h^2}{6};$$

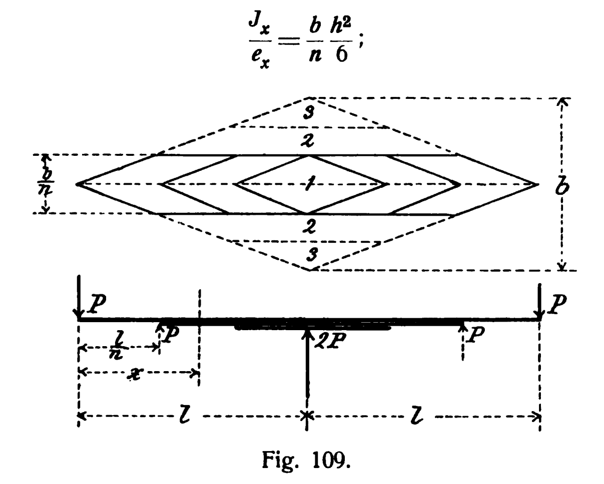


Fig. 109.

also wird die Spannung

$$\sigma = \frac{e_x}{J_x}|M_x| = \frac{6Pl}{bh^2}$$

wie bei der einfachen Feder (die Gl. (186)). Für den Krümmungsradius findet man

$$\varrho = \frac{J_x \,.\, E}{|M_x|} = \frac{bh^3E}{12Pl}$$

in Übereinstimmung mit dem Werte (201). Die übrigen Lamellen liefern dasselbe Resultat.

Blechbalken annähernd gleicher Biegungsfestigkeit.

3) Die Blechbalken werden oft als Körper annähernd gleicher Biegungsfestigkeit construirt. Der Querschnitt ist dann ein zusammengesetzter und besteht gewöhnlich aus Steg, Winkeleisen und Gurtlamellen (Fig. 110), welche durch Nieten mit einander verbunden werden. Man lässt die Lamellen sich nicht über den ganzen Balken erstrecken, sondern schneidet sie nach und nach ab, entsprechend der Abnahme des Biegungsmomentes; in dieser Weise erreicht man, dass die grösste Spannung in einer bestimmten Anzahl von Querschnitten gleich der zulässigen Spannung wird.

Für die Berechnung des Querschnittes eignet sich das folgende von Prof. Tetmajer angegebene Verfahren. Man bestimmt in gewöhnlicher Weise den Querschnitt, der dem Maximalmomente entspricht und berechnet das in diesem Querschnitt erforderliche Widerstandsmoment aus der Gleichung

$$\frac{J}{e} = \frac{\max|M_x|}{s}. \tag{203}$$

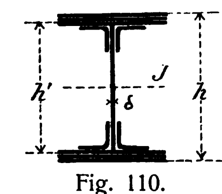


Fig. 110.

Das Trägheitsmoment J ist die Summe der Trägheitsmomente des Steges und der beiden Gurte, welche gleich angenommen werden. Mit genügender Annäherung erhält man

$$J = 2F\left(\frac{h'}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{12}\,\delta h'^3,$$

wo F die effective Fläche (d. h. nach Abzug der Nietlöcher) des Fusses und des Kopfes ist, und h' den Abstand der Schwerpunkte der beiden Flächen F von einander bedeutet (gewöhnlich 3 bis 5 cm kleiner als die ganze Höhe h). In dem Ausdrucke für J sind die Trägheitsmomente der beiden Flächen F in Bezug auf ihre eigenen Schwerpunktaxen vernachlässigt worden, so dass der Ausdruck thatsächlich ein wenig zu klein ist. Für das Widerstandsmoment ergiebt sich jetzt

$$\frac{J}{e} = \frac{\frac{1}{2}Fh'^2 + \frac{1}{12}\,\delta h'^3}{\frac{1}{2}h}.$$

Wählt man im Nenner h' statt h, wodurch der in J begangene Fehler teilweise compensirt wird, so findet man

$$\frac{J}{e} = h'(F + \tfrac{1}{6}\,\delta h'). \tag{204}$$

Aus den Gleichungen (203) und (204) folgt

(205) $$F = \frac{\max |M_x|}{sh'} - \tfrac{1}{6}\,\delta h'.$$

Die Werte von h und δ werden meistens im voraus gewählt; die Fläche F wird dann mit Hülfe der Gleichung (205) berechnet und aus einer passenden Anzahl von Lamellen und Winkeleisen zusammengesetzt.

Wenn der Kopf und der Fuss des Blechbalkens z. B. aus drei Lamellen mit den Querschnittsflächen F_1, F_2 und F_3, von innen nach aussen gerechnet, und aus zwei Winkeleisen mit der Gesamtfläche F_0 bestehen, so ist

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3,$$

und die Formel (205) ergiebt

(206) $$\max |M_x| = sh' \left\{ \tfrac{1}{6}\,\delta h' + F_0 + F_1 + F_2 + F_3 \right\}.$$

Um zu bestimmen, wo die äussersten Lamellen abgeschnitten werden können, sucht man diejenigen Querschnitte auf, in denen

$$|M_x| = sh' \left\{ \tfrac{1}{6}\,\delta h' + F_0 + F_1 + F_2 \right\}$$

ist. Man verfährt ähnlich mit den übrigen Lamellen; die Winkeleisen werden über die ganze Länge des Balkens erstreckt, damit die Auflager bequem construirt werden können. Die Bestimmung der Querschnitte, in welchen die einzelnen Lamellen abgeschnitten werden dürfen, führt man am besten graphisch aus. Zu diesem Zwecke construirt man mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons die Culmannsche Momentenfläche (Fig. 111) und teilt deren grösste Ordinate y_m in fünf

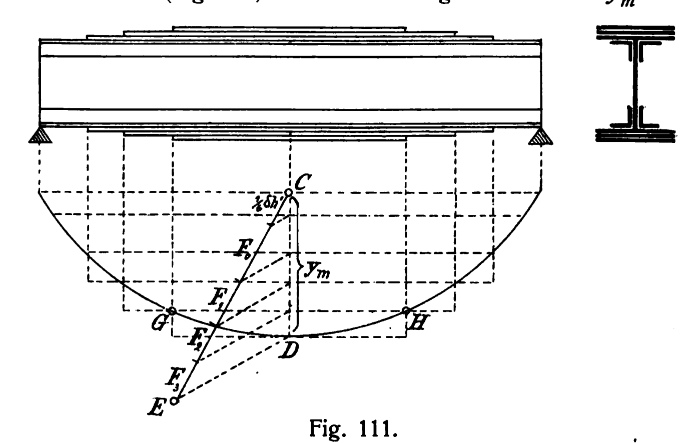


Fig. 111.

Teile, die sich wie die Flächeninhalte $\frac{1}{6}\delta h'$, F_0, F_1, F_2 und F_3 verhalten, in der Reihenfolge von oben nach unten gerechnet. Man führt die Teilung so aus, dass man auf einer Geraden von dem oberen Endpunkte C der Ordinate y_m aus zu diesen Flächeninhalten proportionale Strecken abträgt, den Endpunkt E mit dem unteren Endpunkte D von y_m verbindet und durch die Teilpunkte auf CE Parallele zu ED zieht. Durch die Teilpunkte von CD werden dann Parallele zur Schlusslinie gezogen; die Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Seilpolygon liegen in den zu bestimmenden Schnitten. Denn bei G und H z. B. hat das Biegungsmoment den Wert

$$|M_x| = sh' \left\{ \tfrac{1}{6}\delta h' + F_0 + F_1 + F_2 \right\},$$

da ja die Biegungsmomente proportional den Ordinaten der Culmannschen Momentenfläche sind.

Numerisches Beispiel.

4) Ein Blechbalken von 3 m Länge ist an einem Ende eingespannt und gleichförmig mit 2.4 Tonnen pro laufenden Meter, mit Einschluss des Eigengewichtes belastet. Seine Höhe h beträgt 24 cm und die Stärke des Steges δ ist 1 cm. Man construire den Querschnitt und bestimme die Länge der Lamellen.

Das grösste Biegungsmoment kommt in dem Einspannungsquerschnitte vor und beträgt

$$\max |M_x| = \frac{pl^2}{2} = \frac{2400 \,.\, 300^2}{100 \,.\, 2} = 1080000 \text{ kg cm}.$$

Wählt man für Schmiedeisen $s = 760 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und nimmt $h' = 20$ cm an, so erhält man aus der Gleichung (205)

$$F = \frac{1080000}{760 \,.\, 20} - \tfrac{1}{6}\, 20 = 67.7 \text{ cm}^2.$$

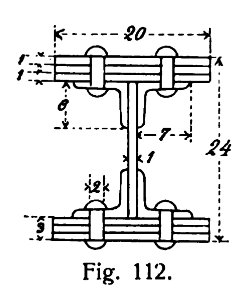


Fig. 112.

Zweckmässigerweise wird dieser Flächeninhalt F so verteilt (Fig. 112): Man wählt

Drei Lamellen 3 . 20 . 1	= 60 cm²
Zwei Winkeleisen 2 . (7 + 5) . 1	= 24 cm²
Summe	84 cm²
Abzug wegen der Nieten 2 . 4 . 2 . 1	= 16 cm²
Effective Fläche	= 68 cm².

In der Figur 113 ist die Momentenfläche construirt und gemäss dem obigen in horizontale Streifen eingeteilt. Mit Rücksicht auf die Abzüge für die Nieten ist

$\frac{1}{8}\,\delta h' = 3.33\,\text{cm}^2,\ F_0 = 20\,\text{cm}^2,\ F_1 = F_2 = F_3 = 16\,\text{cm}^2.$

Die Construction zeigt, dass die äussersten Lamellen in der Entfernung 0.45 m, die mittleren Lamellen in der Entfernung 0.85 m und

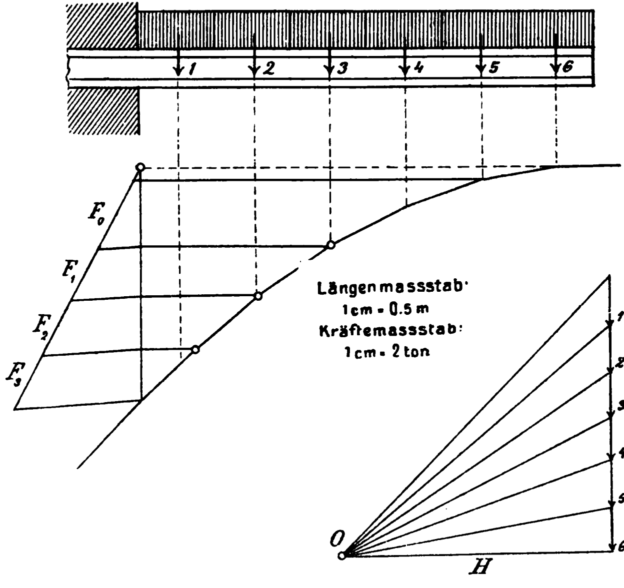


Fig. 113.

die innersten Lamellen in der Entfernung 1.35 m vom Einspannungsquerschnitte abgeschnitten werden können. Wegen der Nietung sind dabei alle Längen etwa 10 cm länger als ihre theoretischen Werte gerechnet worden.

§ 16.

Graphische Behandlung der elastischen Linie.
A. Prismatische Balken.

Satz von Mohr.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie eines geraden prismatischen Balkens ist (§ 12 B)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{JE},$$

sie stimmt in Bezug auf ihre Form mit der Differentialgleichung der allgemeinen Kettenlinie (§ 78, I)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H} = \frac{\varphi(x)}{H}$$

vollständig überein. *Die elastische Linie kann also als eine Kettenlinie aufgefasst werden, bei der* $p = M_x$ *und* $H = JE$ *ist, d. h. welche die Momentenfläche zur Belastungsfläche hat und deren Horizontalspannung gleich dem constanten Producte aus dem Trägheitsmomente des Querschnittes in den Elasticitätsmodul des Materiales ist.*

Construction der elastischen Linie.

Auf Grund dieses Satzes, der von Prof. Mohr aufgestellt worden ist, kann die elastische Linie construirt werden. Zu diesem Zwecke zeichnet man zunächst auf gewöhnliche Weise ein zu den gegebenen Belastungen gehörendes Seilpolygon, betrachtet die dabei erhaltene Momentenfläche als Belastungsfläche und construirt dazu ein neues Seilpolygon mit der Polweite *JE*. Dieses Polygon bildet dann die elastische Linie des Balkens.

Würde man die Abscissen und Ordinaten der elastischen Linie in demselben Massstabe construiren, so würde die Linie kaum merkbar von einer geraden Linie abweichen. Um ein klares Bild der elastischen Linie zu erhalten, müssen die Ordinaten in einem gewissen Verhältnis vergrössert werden. Die so entstandene verzerrte Linie ist dann mit der wirklichen affin verwandt. Näheres hierüber enthält die Anw. 1) unten.

Anwendungen.

1) *Man construire die elastische Linie eines auf zwei Stützen frei aufliegenden, gleichförmig belasteten Balkens. Speciell wähle man den auf p. 105 und 112 behandelten Balken.*

Die Spannweite l wird in eine genügende Anzahl ($= n$) gleich lange Felder eingeteilt (Fig. 114). Auf jedes Feld kommt dabei die Belastung $\frac{pl}{n}$. Ein Längenmassstab und ein Kräftemassstab werden ge-

wählt. Auf einer Kraftlinie trägt man die Belastungen $\frac{pl}{n}$ ab, wählt eine Polweite h und construirt ein Seilpolygon zu diesen Belastungen. Die erhaltene Momentenfläche wird durch die Richtungslinien der Kräfte $\frac{pl}{n}$ in verticale Felder geteilt, welche Paralleltrapeze sind (ausgenommen die beiden äussersten Dreiecke). Man reducirt nun diese

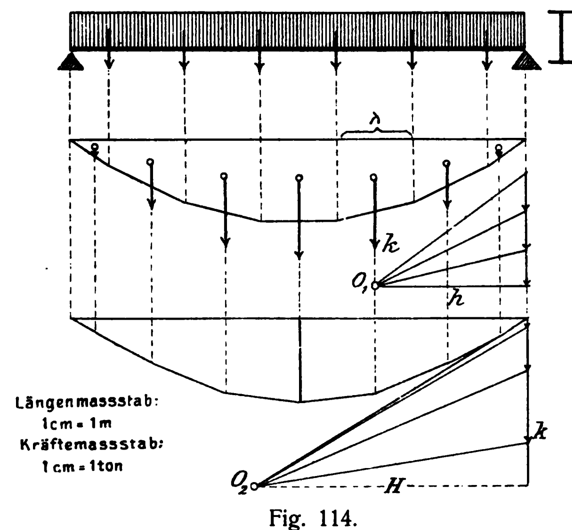


Fig. 114.

Flächen auf eine gemeinsame Grundlinie a und betrachtet die erhaltenen Höhen als verticale Kräfte, welche in den Schwerpunkten der Trapeze wirken. Mit einer Polweite H, die eine Länge ist (vergl. den Ausdruck (207)), construirt man dann ein zweites Seilpolygon; dieses stellt die elastische Linie dar, abgesehen von der Verzerrung in verticaler Richtung. Das Verzerrungsverhältnis muss noch bestimmt werden. Man nehme zuerst an, die Polweite H sei so gewählt worden, dass die construirte elastische Linie der wirklichen ähnlich ist. Es werde die Länge eines Feldes mit λ, die auf die Grundlinie a reducirte Höhe der entsprechenden Rechtecksfläche mit k, das Biegungsmoment in dem Schnitte von k mit M_x, der Krümmungsradius der elastischen Linie ebenda mit ϱ bezeichnet. Für den Winkel δ zwischen den beiden in dem Schnitte von k zusammenstossenden Seiten des zweiten Seilpolygons findet man genügend genau

$$\delta = \frac{\lambda}{\varrho} = \lambda \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda \frac{M_x}{JE} \cdot$$

Andererseits ergiebt das zweite Kräftepolygon, wo die Polweite H sehr gross ist, mit grosser Annäherung

$$\delta = \frac{k}{H}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\lambda M_x}{JE} = \frac{k}{H},$$

und nach Einsetzen von

$$M_x = h\frac{ka}{\lambda}$$

ergiebt sich für die zu bestimmende Polweite

$$H = \frac{JE}{ha}.$$

Die Verzerrung entsteht dadurch, dass man beim Zeichnen H als einen Bruchteil von $\frac{JE}{ha}$ wählt. Das Verzerrungsverhältnis hat also genügend genau den Wert

$$\frac{JE}{Hha}. \tag{207}$$

In der Figur 114 ist $l = 600$ cm, $J = 3642$ cm^4, der Längenmassstab 1 cm = 1 m, der Kräftemassstab 1 cm = 1000 kg; die Polweite h ist gleich 2000 kg, die Grundlinie $a = \lambda = 100$ cm und die Polweite H gleich $\frac{1}{10}\,J = 364.2$ cm gewählt worden. Dabei ergiebt sich das Verzerrungsverhältnis

$$\frac{JE}{Hha} = \frac{J\,.\,2000000}{\frac{1}{10}\,J\,.\,2000\,.\,100} = 100.$$

Da der Längenmassstab der Zeichnung ebenfalls 1 : 100 ist, so erscheinen die Ordinaten in natürlicher Grösse. Wie in § 12 B findet man speciell die grösste Durchbiegung $f = 1.2$ cm.

2) *Ein in einem Punkte belasteter Balken ruht frei auf zwei Stützen* (Fig. 115). *Die Gleichung der elastischen Linie soll mit Anwendung des Mohr'schen Satzes aufgestellt werden.*

Die Reactionen an den Stützen sind

$$A = \frac{l-a}{l}P,$$

$$B = \frac{a}{l} P.$$

Das Biegungsmoment ist innerhalb des Intervalles $0 < x < a$:

$$M_x = Ax = \frac{P(l-a)\,x}{l},$$

und innerhalb des Intervalles $a < x < l$:

$$M_x = B(l-x) = \frac{Pa\,(l-x)}{l}.$$

Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit horizontaler Grundlinie und der Höhe

$$M = \frac{Pa\,(l-a)}{l},$$

vorausgesetzt dass die Polweite h des Kräftepolygons gleich eins gewählt worden ist. Die elastische Linie ist eine Kettenlinie (Fig. 116), welche diese Momentenfläche als Belastungsfläche hat. Die Spannungen in den Endpunkten A und B mögen mit S_1 und S_2, ihre Verticalcomponenten mit V_1 und V_2 bezeichnet werden; die Horizontal-

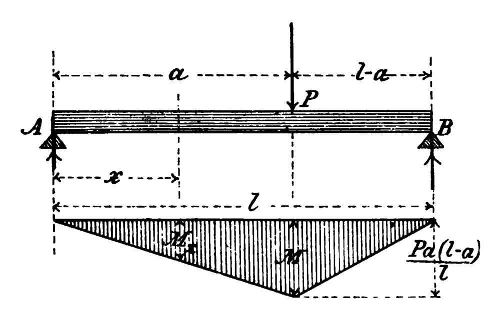


Fig. 115.

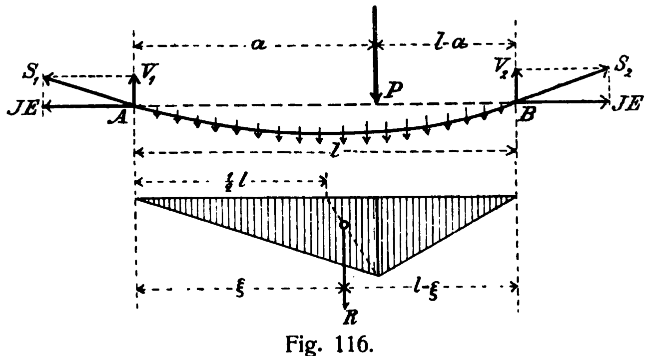


Fig. 116.

projection der Spannungen ist $H = JE$. Die Spannungscomponenten V_1 und V_2 müssen der durch die Momentenfläche dargestellten totalen Belastung

$$R = \frac{Pa(l-a)}{2l}\, l = \frac{Pa(l-a)}{2}$$

das Gleichgewicht halten. R wirkt im Schwerpunkte des Dreieckes in dem Abstande

$$\xi = \tfrac{1}{2} l + \tfrac{1}{3}(a - \tfrac{1}{2} l) = \tfrac{1}{3}(l + a)$$

vom Ende A. Man findet nun

$$V_1 = \frac{l-\xi}{l} R = \frac{a(l-a)(2l-a)}{6l} P,$$

(208)

$$V_2 = \frac{\xi}{l} R = \frac{a(l-a)(l+a)}{6l} P.$$

Ohne Schwierigkeit wird dann die Gleichung der elastischen Linie erhalten. Auf ein von dem Ende A aus gerechnetes Stück der Kettenlinie von der Länge x, kleiner als a (Fig. 117) wirken die Spannung S_1 im Punkte A mit den Componenten V_1 und $H = JE$, eine Spannung S am anderen Ende C und die durch eine Dreiecksfläche dargestellten Belastungen mit der Resultirenden

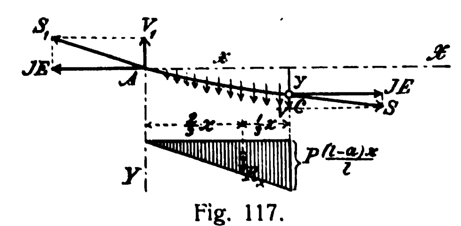


Fig. 117.

$$R_x = \tfrac{1}{2} \frac{x^2(l-a)}{l} P$$

im Abstande $\tfrac{1}{3}x$ von C. Diese Kräfte halten sich das Gleichgewicht; die Momentengleichung für C als Pol liefert

$$-JEy + V_1 x - R_x \frac{x}{3} = 0.$$

Nach Einsetzung der Werte von V_1 und R_x findet man als Gleichung des links von P liegenden Stückes der elastischen Linie

(209) $$y = \frac{P(l-a)x\left\{a(2l-a) - x^2\right\}}{6lJE}.$$

In derselben Weise könnte die Gleichung des Stückes rechts von P abgeleitet werden.

Unter der Annahme $a > \frac{1}{2} l$ findet man die grösste Durchbiegung für

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

in einem Abstande von A gleich

$$x' = \sqrt{\frac{a(2l-a)}{3}}. \tag{210}$$

Sie beträgt

$$f = \frac{Pa(l-a)(2l-a)}{9lJE} \sqrt{\frac{a(2l-a)}{3}}. \tag{211}$$

Wenn die Belastung P von der Mitte des Balkens nach dem rechten Ende verschoben wird, so wächst x' fortwährend, da ja

$$\frac{d(x'^2)}{da} = \frac{2}{3}(l-a)$$

positiv ist. Die Grenzwerte sind

$$x' = \frac{l}{2} \text{ für } a = \frac{l}{2}$$

und

$$x' = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, l = 0.577\, l \text{ für } a = l.$$

Die Grösse x' verändert sich somit relativ wenig. Praktisch genommen kann auch die grösste Durchbiegung an der Mitte des Balkens gemessen werden; dabei ergiebt sich

$$f = \frac{P(l-a)\left\{4a(2l-a) - l^2\right\}}{48JE}. \tag{212}$$

B. **Nicht prismatische Balken.**

Die elastische Linie als Kettenlinie.

Die Differentialgleichung eines geraden, nicht prismatischen Balkens ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ_x}.$$

Man kann sie als Differentialgleichung einer Kettenlinie

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{H}$$

auffassen, wenn man z. B.

(213) $$p=\frac{M_x}{J_x}$$

und

(214) $$H=E$$

wählt. Bei der Construction bestimmt man zuerst die Momentenfläche, welche zu der gegebenen Belastung gehört; von dieser Fläche wird eine zweite Fläche abgeleitet, deren Ordinaten die Grösse $\frac{M_x}{J_x}$ darstellen; diese zweite Fläche fasst man als Belastungsfläche einer Kettenlinie mit der Horizontalspannung E auf, und construirt in gewohnter Weise die Kettenlinie als ein Seilpolygon.

Dieses Verfahren ist in der Anw. 2) unten benützt worden.

Anderes Verfahren.

Wenn einzelne Stücke des Balkens prismatisch sind, wie z. B. bei den in der Anw. 3) auf p. 154 behandelten Balken annähernd gleicher Biegungsfestigkeit, so kann man in derselben Weise wie unter A oben verfahren, vorausgesetzt dass man bei dem Übergange von einem prismatischen Stücke zu einem anderen die Polweite $H=J_xE$ des zweiten Kräftepolygons proportional zu J_x abändert.

Ein Beispiel für dieses Verfahren bietet die Anw. 1) unten.

Anwendungen.

1) Der in § 15 p. 156 behandelte Balken annähernd gleicher Biegungsfestigkeit hat vier verschiedene Querschnitte; die Trägheitsmomente derselben sind der Reihe nach (hier ohne Nietabzug):

$$J_1=\tfrac{1}{2}h'^2\left\{\tfrac{1}{6}\delta h'+F_0\right\}=\tfrac{1}{2}h'^2\times 27.3\,,$$

$$J_2=\tfrac{1}{2}h'^2\left\{\tfrac{1}{6}\delta h'+F_0+F_1\right\}=\tfrac{1}{2}h'^2\times 47.3\,,$$

$$J_3 = \tfrac{1}{2} h'^2 \left\{ \tfrac{1}{6} \delta h' + F_0 + F_1 + F_2 \right\} = \tfrac{1}{2} h'^2 \times 67.3\,,$$

$$J_4 = \tfrac{1}{2} h'^2 \left\{ \tfrac{1}{6} \delta h' + F_0 + F_1 + F_2 + F_3 \right\} = \tfrac{1}{2} h'^2 \times 87.3\,.$$

Die verschiedenen Polweiten müssen sich wie die Zahlen 27.3, 47.3, 67.3 und 87.3 zu einander verhalten.

Man construirt zunächst mit einer Polweite h des Kräftepolygons die Momentenfläche und teilt sie in eine genügende Anzahl von Feldern; in den Schwerpunkten dieser Felder werden den Flächeninhalten derselben proportionale Kräfte angebracht, und zwar wählt man hierzu die Höhenlinien von Rechtecken mit der gleichen Grundlinie a. Die Felder müssen dabei so gewählt werden, dass eine Kraft in jedem Querschnitte liegt, in dem der Querschnitt des Balkens sich ändert. Die elastische Linie ist ein zu diesen Kräften gehörendes Seilpolygon; die erste Seite ist horizontal, die längste Polweite H des bei der Construction angewendeten Kräftepolygons wird nach und nach in dem Verhältnis der oben angeführten Zahlen vermindert, je nachdem die entsprechende Seilpolygonseite die Richtungslinie einer Kraft trifft, welche zwei verschieden starke Teile des Balkens von einander trennt. Wie auf p. 160 ist das Verzerrungsverhältnis

$$\frac{JE}{Hha}\,,$$

wo J das grösste Trägheitsmoment bezeichnet (J_4 oben).

In der Figur 118 ist ein Längenmassstab 1 cm $=$ 0.5 m und ein Kräftemassstab 1 cm $=$ 2 t benützt; ferner ist $h = 8$ t und $a = 1.25$ m. Da der absolute Massstab der Längen 1: 50 ist, so muss man, um die Ordinaten der elastischen Linie in doppelter natürlicher Grösse zu erhalten

$$H = \frac{J_4 E}{100\, ha} = \frac{17460\,.\,10^6\,.\,2}{100\,.\,8000\,.\,125} = 349.2 \text{ cm}$$

wählen. Für die grösste Durchbiegung findet man $f = 1.0$ cm.

2) Ein Blechbalken von 8 m Länge ist an beiden Enden gestützt und symmetrisch durch Lasten von je 1.5 t in 1 m gegenseitiger Entfernung belastet, wobei keine Last in der Mitte liegt (Fig. 119). Die Höhe des Querschnittes beträgt 30 cm.

In der Mitte des Balkens ist das Biegungsmoment

$$\max |M_x| = 1200000 \text{ kg cm}\,.$$

Mit den Werten $s = 760 \dfrac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $h' = 26$ cm, $\delta = 1$ cm ergiebt die Glei-

chung (205) $F = 56.4$ cm². Der Nietdurchmesser sei 2 cm; diese Fläche kann dann folgendermassen zusammengesetzt werden:

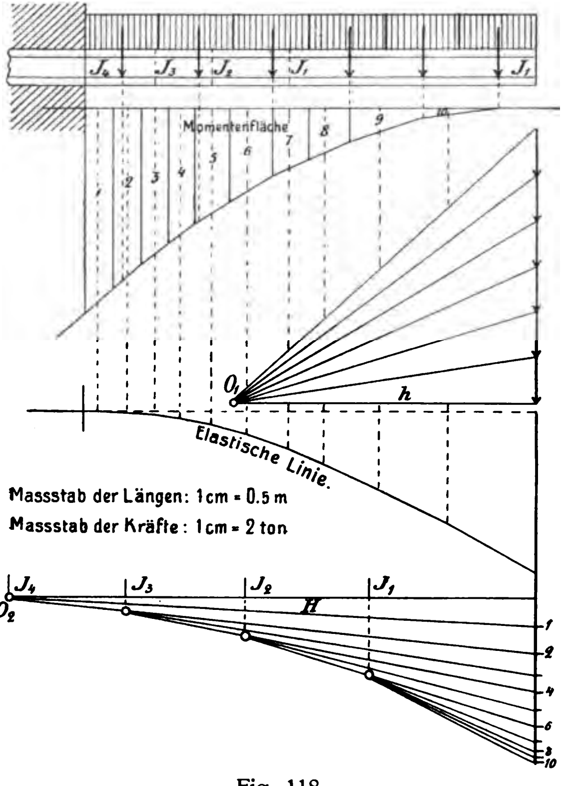


Fig. 118.

Zwei Lamellen, 2 . 20 . 1.1	= 44.0 cm²
Zwei Winkeleisen 2 (7 + 6) . 1	= 26.0 „
Summe	70.0 cm²
Abzug für die Nieten 2 . 2 . 3.2	= 12.8 „
Effective Fläche	= 57.2 cm²

In der Figur (119) ist die Momentenfläche mit einer Polweite des ersten Kräftepolygons $h = 6000$ kg, einem Längenmassstab (I) 1 cm = 1 m und einem Kräftemassstab (II) 1 cm = 2000 kg construirt worden; mit Hülfe des auf p. 155 dargestellten Verfahrens sind die Ab-

stände 2.2 m und 3.1 m von der Mitte des Balkens nach den Stellen, wo die Lamellen abgeschnitten werden können, bestimmt worden.

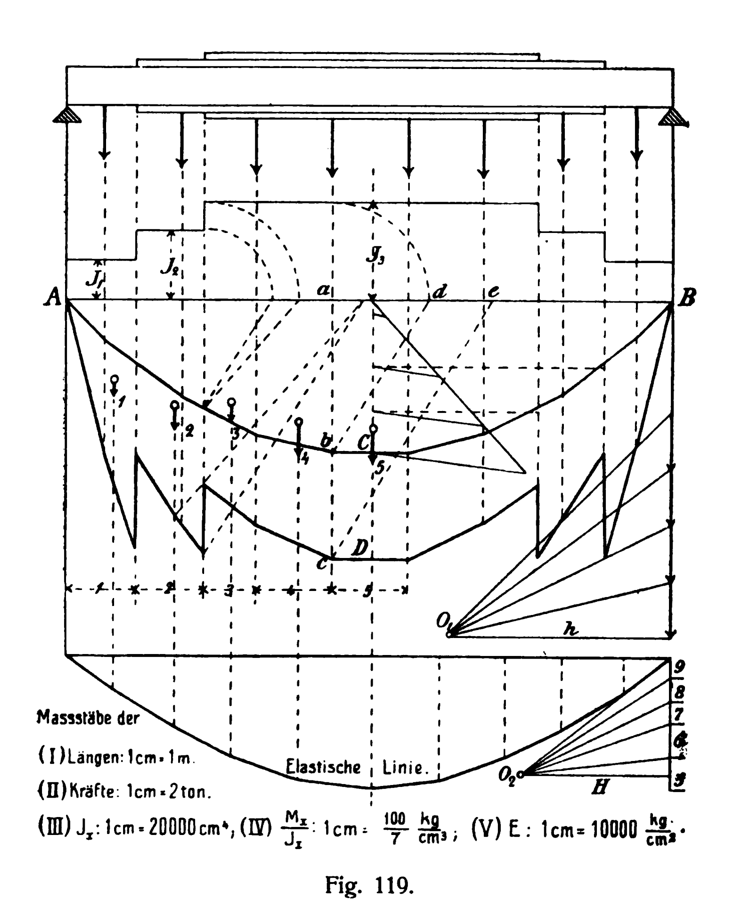


Fig. 119.

In einer treppenförmigen Figur oberhalb der Schlusslinie des ersten Seilpolygons sind die Werte des Trägheitsmomentes J_x innerhalb der verschiedenen Teile des Balkens abgetragen worden. Die Trägheitsmomente sind $J_1 = 10250$ cm⁴, $J_2 = 17690$ cm⁴, $J_3 = 25120$ cm⁴ und der dabei benützte Massstab (III) 1 cm = 20000 cm⁴. Aus der Momentenfläche *ACB* ist dann die Fläche *ADB* mit den Ordinaten $\frac{M_x}{J_x}$ abgeleitet worden. Um die der Ordinate *ab* der Momentenfläche

entsprechende Ordinate *ac* der Fläche für $\frac{M_x}{J_x}$ (und ebenso die übrigen Ordinaten) zu erhalten, wählt man in dem Massstabe (III) eine beliebige Länge $m = 42000$ cm^4, die als *ae* abgetragen wird. Ausserdem wird von *a* das Stück $ad = J_3$ abgetragen; man verbindet dann *d* mit *b* und zieht *ec* parallel zu *db*. Damit *ac* die Grösse $\frac{M_x}{J_x}$ selbst darstelle, deren Einheit $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$ ist, muss es in einem Massstabe (IV) gemessen werden, dessen Einheit $\frac{m}{h}$ Einheiten des Massstabes I ist, d. h. in unserem Falle in dem Massstabe $\frac{42000}{6000}\,\frac{1}{100} = 7:100$ oder 1 cm $= \frac{100}{7}\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$. Die Lamellen der Fläche *ADB* werden als Spannungen betrachtet; ihre Einheit ist $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, d. h. die gleiche wie für die Polweite *E* des zweiten Kräftepolygons. Sie sind auf eine gemeinsame Grundlinie *b* reducirt und als Kräfte in den Schwerpunkten abgetragen worden. In der Figur giebt es neun Lamellen; für sie ist ein Massstab (V) 1 cm $= 10000\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gewählt worden, dessen Einheit also $\frac{1}{10000}:\frac{7}{100} = \frac{1}{700}$ der Einheit des Massstabes (IV) ist. Die Reductionsbasis *b* ist in Übereinstimmung damit gleich 700 cm gewählt worden. Mit Hülfe eines zweiten Kräftepolygons ist dann die elastische Linie als das zugehörige Seilpolygon construirt worden. Hätte man dabei $H = E$ nach dem Massstabe (V) genommen, so wäre die construirte elastische Linie der wirklichen ähnlich geworden. Da der lineare Massstab 1 : 100 ist, wurde in der Figur $H = \frac{1}{100}\,E = \frac{2000000}{100} = 20000\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gewählt um die Ordinaten der elastischen Linie in natürlicher Grösse zu erhalten. Die grösste Durchbiegung ist nach der Figur $f = 17$ mm.

§ 17.

Schubspannungen in gebogenen Balken.

Schubspannungen. Wie auf p. 97, § 12 angeführt ist, liefern die Schubspannungen in dem Querschnitte eines gebogenen Balkens eine Resultirende, welche gleich der Scherkraft für

den Querschnitt ist, aber die entgegengesetzte Richtung hat. Dieses Resultat ergiebt sich unmittelbar mit Hülfe einer Projectionsgleichung für die Verticale als Projectionsaxe. Im dritten Abschnitt wurden Schubspannungen behandelt, welche als gleichförmig über den auf Abscheren beanspruchten Querschnitt verteilt betrachtet werden. Eine derartige Annahme ist nicht mehr zulässig bei den Schubspannungen in dem Querschnitte eines gebogenen Balkens, sondern man muss eine mit der Wirklichkeit besser übereinstimmende Verteilung suchen. Zu diesem Zwecke berechnet man zweckmässigerweise zunächst die Schubspannungen in einem horizontalen Schnitte des gebogenen Balkens.

Schubspannung in einem horizontalen Schnitte.

Aus einem gebogenen prismatischen Balken werde ein zwischen zwei Querschnitten in dem Abstande dx von einander liegendes Stück geschnitten (Fig. 120). Dieses Stück werde noch durch eine der Axe des Balkens und der neutralen Axe des Querschnittes parallele Ebene zerlegt. Auf das so erhaltene Element des Balkens möge keine äussere Kraft wirken; es besteht dann Gleichgewicht zwischen den Normalspannungen und Schubspannungen in den beiden Querschnittsteilen und den Schubspannungen in der horizontalen Schnittfläche. Auf ein Element dF der Querschnittsfläche F in dem Abstande η von der neutralen Axe (Fig. 121) wirkt die Normalspannung

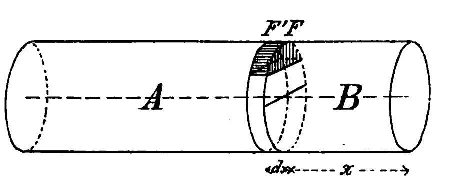


Fig. 120.

$$\sigma_\eta \, dF = \frac{\eta}{J} M_x \, dF;$$

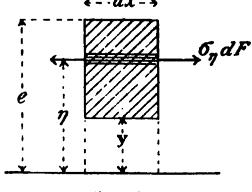


Fig. 121.

auf das entsprechende Element der Fläche F' im entgegengesetzten Sinne die Normalspannung

$$(\sigma_\eta + d\sigma_\eta)\, dF = \frac{\eta}{J}(M_x + dM_x)\, dF.$$

Die Resultirende dieser beiden Spannungen ist

$$\frac{\eta}{J} dM_x \,.\, dF = \frac{dM_x}{J}\,\eta\, dF;$$

für den betrachteten Teil des Querschnittes F ergiebt sich die Summe der Spannungen

$$\frac{dM_x}{J}\int_y^e \eta\, dF, \tag{215}$$

wo die Veränderliche η von dem Werte y, der die Lage des horizontalen Schnittes bestimmt, bis zu dem Werte e in der äussersten Faser variirt.

Nach p. 293, I ist

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}$$

die Scherkraft für den Querschnitt; der Ausdruck (215) ist somit gleich

$$\frac{Q_x\, dx}{J}\int_y^e \eta\, dF.$$

Horizontalspannung pro Längeneinheit.

Bezeichnet man mit H die sog. horizontale Schubspannung pro Längeneinheit, so ist $H\,dx$ die Summe dieser Spannungen für die untere rechteckförmige Begrenzungsfläche des Balkenelementes. Drückt man jetzt die Bedingung aus, dass die Summe der Projectionen der sich das Gleichgewicht haltenden Spannungen am Balkenelemente auf die Längsaxe des Balkens gleich Null ist, so findet man

$$\frac{Q_x\, dx}{J}\int_y^e \eta\, dF = H\, dx,$$

d. h.

$$H = \frac{Q_x}{J} \int_y^e \eta \, dF. \tag{216}$$

Die Grösse $\int_y^e \eta \, dF$ ist das statische Moment des abgeschnittenen Stückes des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe; sie werde mit S_y bezeichnet. Vom Zeichen abgesehen liefern das obere und das untere Querschnittsstück den gleichen Wert von S_y, da ja das Moment des ganzen Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe gleich Null ist. Die Gleichung

$$H = \frac{Q_x \, S_y}{J} \tag{217}$$

zeigt, dass *die Horizontalspannung pro Längeneinheit proportional der Scherkraft für den Querschnitt und dem statischen Momente S_y des abgeschnittenen Stückes des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe sowie umgekehrt proportional dem Trägheitsmomente des Querschnittes ist.*

H:s Abhängigkeit von der Lage des Schnittes.

In einem horizontalen Schnitte des prismatischen Balkens variirt die Schubspannung H von einem Punkte zu einem anderen proportional der Scherkraft Q_x. Beispielsweise ist bei einem an beiden Enden gestützten gleichförmig belasteten Balken

$$Q_x = p\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Q_x und H sind gleich Null in der Mitte und numerisch am grössten an den beiden Enden.

In den horizontalen Schnitten, welche von einem Querschnitte aus construirt werden, verändert sich H proportional dem Momente S_y des abgeschnittenen Stückes in Bezug auf die neutrale Axe. *H ist am grössten in der neutralen Axe und gleich Null am oberen und unte-*

ren Rande des Querschnittes, während die Normalspannung sich gerade umgekehrt verhält.

Specifische Horizontalspannung.

Wenn man die der Balkenaxe parallele Resultirende $H\,dx$ der Schubspannungen in der zwischen den Querschnitten F und F' liegenden Rechtecksfläche mit den Kanten z und dx (Fig. 122) gleichförmig auf diese Fläche verteilt, so erhält man die specifische horizontale Schubspannung

Fig. 122.

$$(218) \quad \tau = \frac{H}{z} = \frac{Q_x}{zJ}\int_y^e \eta\, dF = \frac{Q_x\, S_y}{zJ}.$$

Die Schubspannung τ ist also von der Breite des Schnittes abhängig; wenn z klein ist, so kann τ grosse Werte erhalten.

Schubspannung in verticalen Schnitten.

Es sollen jetzt die Schubspannungen in einem Querschnitte des Balkens berechnet werden. Hier wird vorausgesetzt, dass diese Schubspannungen vertical sind, was in Wirklichkeit nicht zutrifft. Man betrachtet ein kleines parallelepipedisches Element des Balkens zwischen zwei horizontalen Schnitten in dem unendlich kleinen Abstande dy von einander und zwei unendlich nahen verticalen

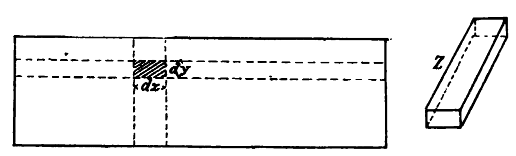


Fig. 123.

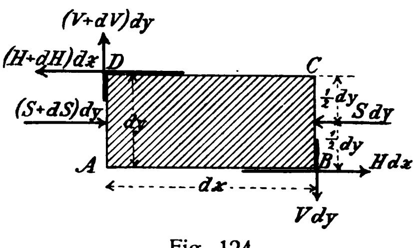


Fig. 124.

Schnitten mit der gegenseitigen Entfernung dx (Fig. 123). Die Figur 124 stellt die auf die Schnittflächen wirkenden Spannungen dar, welche sich Gleichgewicht halten müs-

sen. Unter S ist dabei die pro Längeneinheit gerechnete Normalspannung im Querschnitte verstanden, es ist also $S = \sigma_y z$. Mit Hülfe der Momentengleichung in Bezug auf eine Parallele durch D zur neutralen Axe ergiebt sich nun

$$Vdy \, . \, dx - Hdx \, . \, dy + Sdy \, . \, \tfrac{1}{2} \, dy - (S + dS) \, dy \, . \, \tfrac{1}{2} \, dy = 0,$$

oder

$$(V - H) \, dx \, dy - \tfrac{1}{2} \, dS \, . \, dy^2 = 0 \, .$$

In dieser Gleichung kann man das letzte Glied vernachlässigen, weil es eine kleine Grösse dritter Ordnung ist, während die übrigen Glieder von der zweiten Ordnung sind. Man findet also

$$V = H, \tag{219}$$

d. h. *die verticale Schubspannung pro Längeneinheit ist gleich der horizontalen.*

Da die Breite z des Prismas die gleiche in den horizontalen und den verticalen Seiten ist, so sind auch die specifischen Schubspannungen die gleichen. Man erhält also

$$V = H = \frac{Q_x \, S_y}{J} \tag{220}$$

und

$$\tau = \frac{Q_x \, S_y}{zJ} \, . \tag{221}$$

In demselben Querschnitte ist V am grössten in der neutralen Axe und gleich Null am oberen und unteren Rande. Die Richtung der Schubspannung V ist in allen Punkten entgegengesetzt der Richtung der Scherkraft.

Auf Grund der Gleichung (221) kann man nachher verificiren, dass die Resultirende sämtlicher Schubspannungen in einem Querschnitte der Grösse nach gleich der Scherkraft Q_x ist. Auf einen zur neutralen Axe parallelen Streifen von der Höhe dy (Fig. 125) wirkt die Schub-

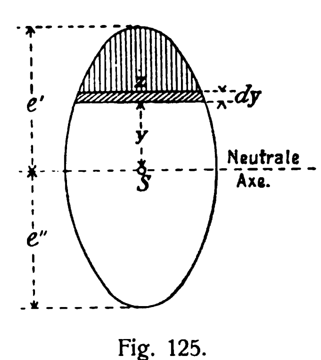


Fig. 125.

kraft $V\,dy$, somit auf den ganzen Querschnitt die Kraft

$$\int_{e''}^{e'} V\,dy.$$

Durch partielle Integration findet man

$$\int_{e''}^{e'} V\,dy = \Big[Vy\Big]_{e''}^{e'} - \int_{e''}^{e'} y\,dV.$$

An den beiden Kanten ist nach dem obigen $V = 0$, folglich wird auch

$$\Big[Vy\Big]_{e''}^{e'} = 0,$$

und man erhält

$$\int_{e''}^{e'} V\,dy = -\int_{e''}^{e'} y\,dV.$$

Aus der Gleichung

$$V = \frac{Q_x\,S_y}{J}$$

ergiebt sich

$$dV = \frac{Q_x}{J}\,dS_y.$$

In Übereinstimmung mit der Figur ist

$$dS_y = -\,zy\,dy,$$

so dass jetzt

$$dV = -\,\frac{Q_x}{J}\,zy\,dy,$$

und

$$-y\,dV = \frac{Q_x}{J}\,zy^2\,dy$$

folgt. Man findet daraus

$$-\int_{e''}^{e'} y\,dV = \frac{Q_x}{J}\int_{e''}^{e'} zy^2\,dy,$$

und weil

$$\int_{e''}^{e'} zy^2\,dy = J$$

ist,

$$-\int_{e''}^{e'} y\,dV = Q_x.$$

Mit Hülfe einer Gleichung oben ergiebt sich schliesslich

$$\int_{e''}^{e'} V\,dy = Q_x,$$

w. z. b. w.

Anwendungen.

1) *Schubspannungen in einem rechteckigen Querschnitte.* *Rechteckiger Querschnitt.*
Für einen rechteckigen Querschnitt (Fig 126) findet man

$$S_y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)b\left(\frac{h}{2}-y\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)b;$$

$$J = \tfrac{1}{12}\,bh^3$$

und

$$V = \frac{6Q_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right). \tag{222}$$

Fig. 126.

Diese Schubspannung V wird graphisch durch eine Parabel (Fig. 127) dargestellt, deren Scheitel auf der neutralen Axe des Querschnittes liegt. Diesem Scheitel entspricht folgender grösster Wert von V

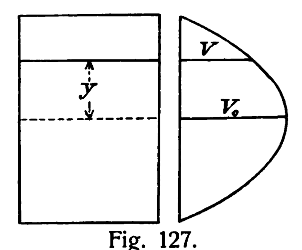


Fig. 127.

$$(223) \qquad V_0 = \frac{3Q_x}{2h} = \frac{Q_x}{\frac{2}{3}h}.$$

Die auf die Flächeneinheit bezogene Schubspannung ist

$$(224) \qquad \tau = \frac{V}{b} = \frac{6Q_x}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

und hat das Maximum

$$(225) \qquad \tau_0 = \frac{V_0}{b} = \frac{3Q_x}{2bh} = \frac{Q_x}{\frac{2}{3}bh};$$

man würde den gleichen grössten Wert auch so erhalten, dass man die Scherkraft Q_x gleichförmig auf zwei Drittel des Querschnittes verteilen würde.

I Querschnitt.

1) *Schubspannungen in einem I Querschnitt.*

Man erhält als angenäherten Wert der Schubspannung in einem Schnitte durch den Kopf oder Fuss eines I Querschnittes (Fig. 128)

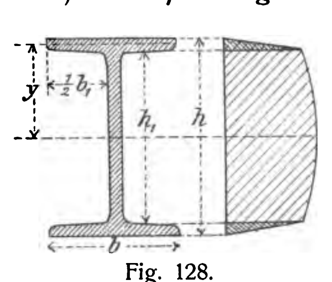


Fig. 128.

$$(226) \qquad V = \frac{Q_x}{J}\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Innerhalb des Steges ist

$$S_y = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) - \frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right) =$$

$$= \frac{bh^2 - b_1h_1^2}{8} - \frac{y^2(b - b_1)}{2}$$

und

$$(227) \qquad V = \frac{Q_x}{J}\left\{\frac{bh^2 - b_1h_1^2}{8} - \frac{y^2(b-b_1)}{2}\right\}.$$

Die beiden Ausdrücke für V werden durch Parabeln dargestellt, von welchen die letztere sehr flach ist, weil das constante Glied innerhalb der Klammer überwiegt. In der Figur 128 rechts sind deshalb die beiden äusseren Segmente klein, das mittlere nicht sehr von einem Rechteck verschieden. Die ganze Fläche ist gleich Q_x. Annähernd gilt also folgendes bemerkenswerte Resultat: *An einem Balken mit* I *Querschnitt wird fast die ganze Scherkraft von dem Stege aufgenommen und verteilt sich gleichförmig über denselben.* Die Dicke des Steges könnte also vermittelst der Gleichung

$$(228) \qquad b - b_1 = \frac{\max |Q_x|}{th_1}$$

berechnet werden, wo t die zulässige Schubspannung ist. Diese Gleichung liefert aber meistens so kleine Werte von $b - b_1$, dass man sie mit Rücksicht auf die Knickgefahr des Steges, das Rosten u. s. w. nicht ohne weiteres benützen kann.

3) *Man berechne die Schubspannung in einem kreisförmigen Querschnitte.*

Kreisförmiger Querschnitt.

§ 18.

Spannungen in schiefen Schnitten. Spannungsellipse.

Spannungen in schiefen Schnitten.

Im vorigen sind nur die Spannungen in horizontalen und verticalen Schnitten eines auf Biegung beanspruchten prismatischen Balkens betrachtet worden. In den letzteren Schnitten kommen sowohl Normalspannungen als auch Schubspannungen vor; in den ersteren giebt es nur

Schubspannungen. Es sollen jetzt die in schiefen Schnitten des Balkens vorhandenen Spannungen bestimmt werden.

Aus dem Balken werde ein dreieckiges Prisma ausgeschnitten, dessen Kanten senkrecht zur verticalen Symmetrieebene des Balkens sind (Fig. 129); es seien dx, dy und ds die Breiten bez. der horizontalen, der verticalen und der schiefen Seite. Auf die verticale Seite wirken Spannungen, welche zusammen eine horizontale Kraft $S\,dy$ und eine verticale Kraft $V\,dy$ liefern, wobei S und V wie vorhin die pro Längeneinheit gerechneten Normal- und Schubspannungen bezeichnen. Auf die horizontale Seite wirkt die horizontale Kraft $V\,dx$ und auf die schiefe Seite eine unbekannte Kraft $R\,ds$, die in zwei Componenten, $N\,ds$ senkrecht zur Fläche und $T\,ds$ in der Fläche selbst, zerlegt werden kann (Fig. 130). Die fünf Kräfte $V\,dx$, $V\,dy$, $S\,dy$, $N\,ds$ und $T\,ds$ halten sich das Gleichgewicht und liefern somit ein geschlossenes Kräftepolygon. N, T und R werden dadurch bestimmt. Statt der fünf Kräfte selbst mögen ihre durch dy dividirten Grössen, d. h.

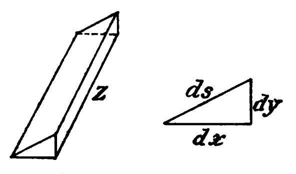


Fig. 129.

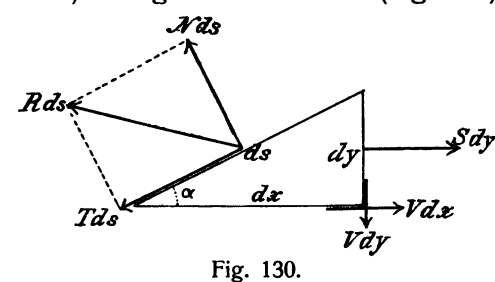


Fig. 130.

$$V\frac{dx}{dy},\; V,\; S,\; N\frac{ds}{dy} \text{ und } T\frac{ds}{dy},$$

oder was dasselbe ist,

$$\frac{V}{\operatorname{tg}\alpha},\; V,\; S,\; \frac{N}{\sin\alpha} \text{ und } \frac{T}{\sin\alpha}$$

nach einander abgetragen werden. Man erhält dabei die Figur 131, wo AB, BC, CD, DF und FA der Reihenfolge nach die betreffenden Strecken sind. Auch die Grössen N und T selbst erscheinen in dieser Figur, und zwar sind sie die Coordinaten des Punktes F in Bezug auf ein Coordinatensystem mit den Axen OA und OD', wie man sofort erkennt, wenn man $DF = \frac{N}{\sin\alpha}$ auf OA und $FA = \frac{T}{\sin\alpha}$ auf OD' projicirt.

Normal- und Schubspannung in einem schiefen Schnitte.

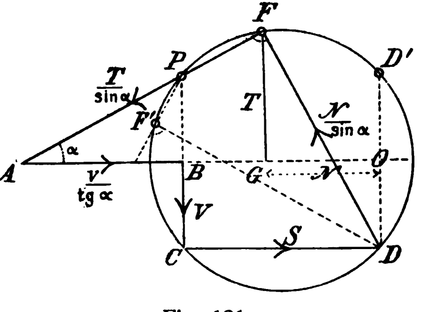


Fig. 131.

Die Figur 131 ergiebt auch die Resultirende R von N und T, und zwar wird sie durch die Strecke OF dargestellt (Siehe Fig. 132). In dieser Lage hat sie nicht die wirkliche Richtung der Spannung in dem schiefen Schnitte; da aber DF und FA die Grössen $\frac{N}{\sin\alpha}$ und $\frac{T}{\sin\alpha}$ mit ihren wahren Richtungen darstellen, so stellt DA die Grösse $\frac{R}{\sin\alpha}$ dar und hat also die Richtung von R.

Culmanns' Kreis.

Für einen anderen Schnitt als den oben betrachteten erhält man einen Punkt F' (Fig. 131), dessen Coordinaten in dem angegebenen Coordinatensysteme die Normal- und Schubspannung für diesen Schnitt darstellen. Die Punkte F, F' u. s. w., welche den verschiedenen Schnitten entsprechen, liegen auf einem Kreise. Es sei P der in Bezug auf die Gerade AB symmetrische Punkt zu dem Punkte C. Dann ist PB gleich V, AB gleich $\frac{V}{\operatorname{tg}\alpha}$, folglich der Winkel PAB gleich α. Die Punkte A, P und

F liegen also auf einer Geraden. Der Winkel PFD ist ein rechter und der Ort der verschiedenen Punkte F somit ein Kreis mit PD als Durchmesser. Er wurde zuerst von Culmann für die Bestimmung der Spannungen in einem schiefen Schnitte benützt.

Hauptspannungen.

Mit Hülfe des Culmannschen Kreises (Fig. 132) kann man in einfacher Weise untersuchen, wie die Spannung R sich mit dem Neigungswinkel des Schnittes ändert. R ist am grössten, wenn F die Lage F_1 einnimmt und am kleinsten, wenn F mit F_2 zusammenfällt. Die beiden entsprechenden Schnitte PF_1 und PF_2 heissen Hauptschnitte und sind senkrecht zu einander; die beiden zugehörigen Spannungen R_1 und R_2 sind die sog. Hauptspannungen (vergl. p. 18). Da die Punkte F_1 und F_2 auf der Axe OA liegen, so kommen keine Schubspannungen in diesen beiden Schnitten vor. Die Hauptspannungen $R_1 = N_1$ und $R_2 = N_2$ sind also normal zu ihren Schnitten; die eine ist immer eine Zugspannung, die andere eine Druckspannung. Aus der Figur ergiebt sich für ihre Grösse

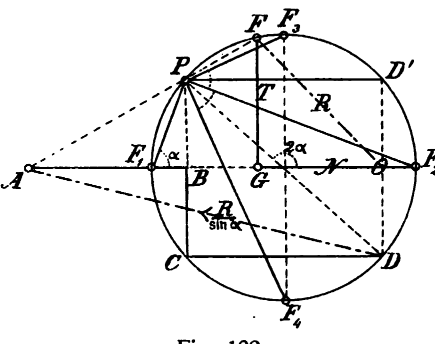


Fig. 132.

$$(229)\qquad \begin{aligned} N_1 &= \frac{S}{2} + \sqrt{V^2 + \frac{1}{4}S^2}, \\ N_2 &= \frac{S}{2} - \sqrt{V^2 + \frac{1}{4}S^2}. \end{aligned}$$

N_1 und N_2 sind danach die Wurzeln der Gleichung

(230) $$N^2 - SN - V^2 = 0.$$

Die Schubspannungen sind am grössten, wenn F mit F_3 oder F_4 zusammenfällt, den Schnitten PF_3 und PF_4 entsprechend. Aus der Figur geht hervor, dass *diese Schnitte der grössten Schubspannungen die Winkel zwischen den Hauptschnitten halbiren.* Der grösste Wert von $|T|$ beträgt

Grösste Schubspannungen.

(231) $$\max|T| = \sqrt{V^2 + \frac{1}{4}S^2}.$$

In den beiden Schnitten PF_3 und PF_4 hat die Normalspannung die Grösse $\frac{1}{2}S$.

Schnitte, auf die nur Schubspannungen wirken.

Auch die den Punkten D und D' des Kreises entsprechenden Schnitte sind der Aufmerksamkeit wert. In diesen Schnitten kommen keine Normalspannungen, sondern nur Schubspannungen vor. Der eine Schnitt ist horizontal, der andere liegt symmetrisch dazu in Bezug auf den Hauptschnitt für N_2.

Bezeichnet z wie auf p. 172 die Breite des Schnittes, so bestehen zwischen den auf die Längeneinheit und auf die Flächeneinheit bezogenen Spannungen die Beziehungen

Hauptspannungen pro Flächeneinheit.

$$\sigma = \frac{S}{z}, \quad \tau = \frac{V}{z},$$

und die Hauptspannungen haben pro Flächeneinheit die Werte

(232) $$\sigma_1 = \frac{N_1}{z} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\tau^2 + \frac{1}{4}\sigma^2},$$
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{z} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\tau^2 + \frac{1}{4}\sigma^2}.$$

Die Neigungswinkel α und $\alpha + 90^\circ$ der Hauptschnitte sind durch die Gleichung

(233) $$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}$$

bestimmt.

Spannungsellipse.

Ausser durch den Kreis von Culmann können die Spannungen in den Schnitten, die durch eine Senkrechte zur verticalen Symmetrieebene geführt werden, mit Hülfe der sog. Spannungsellipse dargestellt werden. Man trägt die totale Spannung R in einem Schnitte der Grösse und Richtung nach als eine Strecke ab. Der Endpunkt dieser Strecke beschreibt dann, wenn der Schnitt variirt, die Spannungsellipse. Die Hauptspannungen sind die Halbaxen der Ellipse. Dieses Resultat ergiebt sich unmittelbar aus den allgemeinen Untersuchungen in § 2, II, kann aber auch aus der Darstellung mit Hülfe des Culmannschen Kreises folgendermassen abgeleitet werden.

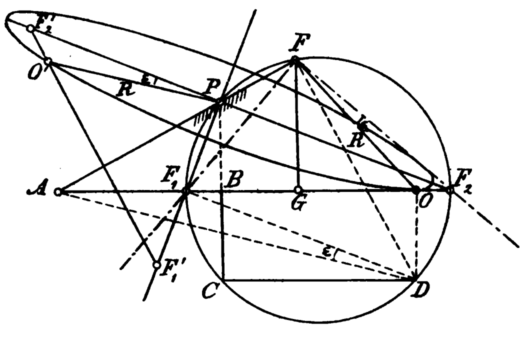


Fig. 133.

In der Figur 132 liefert DA die Richtung, OF die Grösse von R. Man ziehe von P aus eine Parallele zu DA und trage darauf das Stück PO' gleich R ab (Fig. 133). Der Ort des Punktes O' soll bestimmt werden. PO' schliesst mit F_2P einen Winkel ein, der mit ε bezeichnet werde. Aber auch die beiden Winkel F_1DA und OFF_2 sind gleich ε. Die Schenkel des ersteren sind in der That parallel den Schenkeln des Winkels $F_2'PO'$. Was den Winkel OFF_2 betrifft, so ist er die Differenz

zwischen den Winkeln F_1OF und F_1F_2F. Da die Dreiecke OOF mit den Seiten N, T und R und DFA· mit den Seiten $\frac{N}{\sin \alpha}$, $\frac{T}{\sin \alpha}$ und $\frac{R}{\sin \alpha}$ ähnlich sind, so sind die Winkel F_1OF und ADF gleich gross. Die Winkel F_1DF und F_1F_2F sind als über demselben Bogen stehende Peripheriewinkel gleich gross. Folglich ist OFF_2 auch gleich der Differenz von ADF und F_1DF, d. h. gleich ε. Man denke sich jetzt die Figur F_1OF_2F aus der Ebene gehoben und so gelegt, dass F mit P, FF_2 mit PF_2' und FF_1 mit PF_1' zusammenfällt; der Punkt O fällt dann auf O'. Wenn der Schnitt sich ändert, so bleibt also O' unveränderlich auf der ebenfalls unveränderlichen Strecke $F_1'F_2'$, deren Endpunkte längs der festen Geraden PF_1' und PF_2' gleiten. Dabei beschreibt O' bekanntlich eine Ellipse, die Spannungsellipse. PF_1' und PF_2' sind die Axenrichtungen, OF_1 und OF_2 die grössere und kleinere Halbaxe der Ellipse. Die Strecke $F_1'F_2'$ nimmt ein Mal die Lage F_1F_2 und der Punkt O' die Lage O ein. Die Spannungsellipse geht also durch den Punkt O; in dem betreffenden Augenblicke ist die gleitende Bewegung eine Drehung um den Pol D; somit berührt der Kreisdurchmesser F_1OF_2 die Ellipse in O.

Spannungsellipse in verschiedenen Punkten.

Die Figur 134 veranschaulicht die Spannungsellipse für mehrere Punkte eines an beiden Enden frei aufliegenden und in Bezug auf die Mitte symmetrisch belasteten prismatischen Balkens. Die Halbmesser der Ellipse stellen auf die Flächeneinheit bezogene Spannungen dar. Man bestimmt die Richtungen der Hauptaxen mit Hülfe der Gleichung (233), ihre Längen auf Grund der Gleichungen (232).

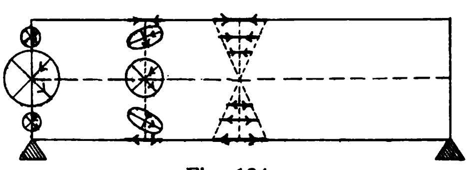


Fig. 134.

Für Punkte der äussersten Faser auf der einen oder anderen Kante des Balkens ist $\tau = 0$ und die Formeln (232) und (233) liefern

$$\alpha = 0 \text{ und } \alpha = 90^\circ$$

sowie

$$\sigma_1 = \sigma \text{ und } \sigma_2 = 0.$$

Die Spannungsellipse ist eine horizontale geradlinige Strecke von der Länge 2σ, die man sich doppelt zu denken hat.

In den Punkten der Axe des Balkens ist $\sigma = 0$; man findet dann

$$\alpha = 45^\circ \text{ und } \alpha = 135^\circ$$

sowie

$$\sigma_1 = \tau \text{ und } \sigma_2 = -\tau.$$

Die Spannungsellipse ist ein Kreis vom Radius τ; die Hauptschnitte halbiren die Winkel zwischen der Axe des Balkens und der Verticalen.

Im Querschnitt durch die Mitte des Balkens ist das Biegungsmoment ein Maximum, die Scherkraft Null und $\tau = 0$; die Spannungsellipse ist deshalb eine doppelte geradlinige Strecke wie für die äussersten Fasern. Im Schwerpunkte des Querschnittes zieht sich die Ellipse in einen Punkt zusammen; in diesem Punkte ist der Balken gar nicht gespannt.

In den Endquerschnitten hat man $\sigma = 0$ wie in der Axe des Balkens. Die Spannungsellipse ist somit ein Kreis, der sich für die Punkte der äussersten Fasern in einen Punkt zusammenzieht.

Über das Verfahren der Dimensionirung auf Biegung beanspruchter Balken.

Es soll jetzt eine Anwendung der Resultate betreffend die Spannungen in verschiedenen Schnitten eines auf Biegung beanspruchten Balkens gemacht werden, um zu untersuchen, ob das zur Dimensionirung des Balkens benützte Verfahren berechtigt ist. In der That setzt die dazu angewendete Gleichung

$$\frac{J}{e} = \frac{\max |M_x|}{s}$$

voraus, dass die grösste überhaupt vorhandene Spannung in einer äussersten Faser des Maximalmomentenquerschnittes vorkommt. Es wäre aber möglich, dass die eine Hauptspannung in einem inneren Punkte des Balkens einen numerisch noch grösseren Wert hätte. Nach der ersten Formel (232) ist die eine Hauptspannung[1]

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + \sqrt{\tau^2 + \frac{1}{4}\sigma^2},$$

wo $\sigma > 0$ angenommen werde. Daraus folgt

$$\sigma_1 - \sigma = -\frac{1}{2}\sigma + \sqrt{\tau^2 + \frac{1}{4}\sigma^2}$$

und

$$\sigma_1 (\sigma_1 - \sigma) = \tau^2.$$

Die Spannung in der äussersten Faser des betrachteten Querschnittes sei σ'. Damit σ_1 nicht grösser als σ' sei, muss man

$$\sigma' (\sigma' - \sigma) \geqq \tau^2 \tag{234}$$

haben. Bezeichnet y den Abstand der betrachteten inneren Stelle des Querschnittes von der neutralen Axe, so ist

$$\sigma = \frac{y}{e}\sigma';$$

aus (234) ergiebt sich dabei

$$\sigma'^2 \left(1 - \frac{y}{e}\right) \geqq \tau^2$$

[1] Richtiger wäre es, wenn man bei der obigen Untersuchung die Hauptdehnungen in Betracht ziehen würde (Siehe § 24). Das oben abgeleitete Ergebnis ist aber einfacher und genügt für unseren speciellen Zweck.

oder

$$\tau \leqq \sigma' \sqrt{1 - \frac{y}{e}} \tag{235}$$

als Bedingung dafür, dass die Spannung der äussersten Faser grösser als alle Spannungen in inneren Punkten des Querschnittes sei. Die Prüfung erfolgt am besten graphisch; man construirt eine Curve, welche die Function

$$u = \sigma' \sqrt{1 - \frac{y}{e}} \tag{236}$$

darstellt, d. h. eine Parabel mit verticaler Axe (Fig. 135), sowie die Curve, welche die Schubspannung τ darstellt. Wenn die letztere Curve ganz innerhalb der ersteren liegt, wie in der Figur 135, so ist $\tau < u$ und die Bedingung (235) wird erfüllt. Schneidet dagegen die Curve für τ die Parabel, welche die Grösse u darstellt, so ist die Bedingung nicht erfüllt und es giebt grössere Spannungen im Innern des Balkens als in der äussersten Faser. Die Figur 136 veranschaulicht diesen Fall.

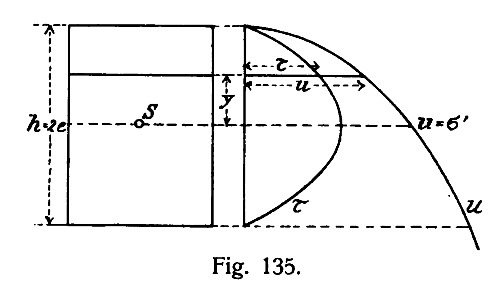


Fig. 135.

Im allgemeinen sind die gewöhnlichen Regeln der Dimensionirung mit Ausnahme einer geringen Anzahl extremer Fälle anwendbar. In diesen Fällen ist meistens der Steg des Querschnittes so dünn, dass sehr grosse Schubspannungen entstehen. Aber schon für die gewöhnlichen I Querschnitte gilt die Regel. In zweifelhaften Fällen

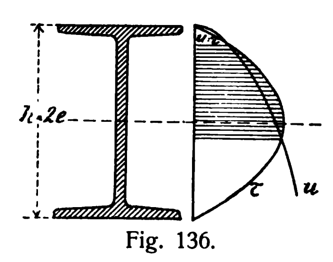


Fig. 136.

untersucht man einen oder einige solche Schnitte, in welchen grosse Spannungen vorkommen.

§ 19.

Übungsaufgaben zur Lehre von der Biegungsfestigkeit.

1) Ein 4 m langer Balken aus Föhrenholz, mit quadratischem Querschnitt, ist an beiden Enden frei aufgelagert und trägt eine Last von 1.5 t in der Mitte sowie eine über den ganzen Balken gleichförmig verteilte Belastung von 1.2 t, einschliesslich des Eigengewichts. Man dimensionire den Balken unter der Annahme einer zulässigen Druckbeanspruchung $s'' = 60 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

2 Eine Brücke von 4 m Spannweite besteht aus zwei runden Tragbalken aus Föhrenholz, von 30 cm Durchmesser, und der Brückenbahn. Das Gewicht des Ganzen beträgt 1 t. Über die Brücke rollt ein Wagen mit vier Rädern, dessen beide Axen die Entfernung 1.8 m von einander haben. Wie schwer darf der Wagen nebst seiner Last sein, wenn die gleiche zulässige Beanspruchung wie im Beispiel 1) benützt wird?

3) Ein prismatischer Balken ist an beiden Enden horizontal eingespannt und gleichförmig über die ganze Länge belastet. Man bestimme die Reactionen, die Biegungsmomente, die elastische Linie und die grösste Durchbiegung.

4) Ein gleichförmig belasteter Balken ruht frei auf zwei Stützen und ragt an beiden Enden gleich viel über die Stützen heraus. Wann besitzt der Balken drei gleich stark beanspruchte gefährliche Querschnitte und welche Dimensionen muss er haben?

5) Bei einer ungleicharmigen Drehbrücke besteht das eigene Gewicht teils aus einer über die ganze Länge verteilten gleichförmigen Belastung, teils aus dem am Ende des kürzeren Armes zum Balanciren angebrachten Gegengewichts. Man berechne die grössten aus dem eigenen Gewicht herrührenden Biegungsmomente, wenn die Brücke geschlossen oder wenn sie offen ist; in dem ersten Falle wird sie als ein continuirlicher Balken auf drei Stützen in derselben Horizontalebene behandelt.

6) Man berechne die Reactionen und Biegungsmomente für einen continuirlichen Balken mit vier gleich langen Feldern, gleich hohen S ützen und gleichförmiger Belastung.

7) Ein continuirlicher Balken besitzt drei gleich lange Felder, gleich hohe Stützen und gleich stark belastete Felder, und zwar seien das mittlere Feld durch eine gleichförmige Belastung, die beiden Seiten-

felder durch je eine in ihren Mitten concentrirte einzelne Belastung beansprucht. Man verlangt die Reactionen, die Biegungsmomente und die grössten Durchbiegungen.

8) Man zeige, dass die Gleichung der elastischen Linie eines an beiden Enden frei aufliegenden, symmetrisch angeordneten und belasteten Balkens in die Form

$$y = \frac{x}{E}\int_0^x \frac{M_x}{J_x}\,dx - \frac{1}{E}\int_0^x \frac{x\,M_x}{J_x}\,dx$$

gebracht werden kann, und dass die grösste Durchbiegung den Wert

$$f = \frac{1}{E}\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{\xi M_\xi}{J_\xi}\,d\xi$$

hat, wo

$$\xi = \frac{l}{2} - x$$

ist.

9) Ein an einem Ende eingespannter Balken ist über die ganze Länge gleichförmig belastet. Derselbe soll als ein Körper gleicher Biegungsfestigkeit construirt werden, wenn der Querschnitt 1) ein Kreis 2) ein Rechteck von constanter Breite und 3) ein Rechteck von constanter Höhe ist.

10) Ein Balken von überall gleicher Biegungsfestigkeit ist an einem Ende eingespannt und teils gleichförmig, teils durch eine Last am freien Ende belastet. Man berechne die Materialersparnis im Vergleich mit einer prismatischen Form.

11) Eine Maschinenwelle aus Gussstahl trägt die Belastung 4000 kg, welche die Welle in zwei Stücke von 0.5 und 1 m Länge teilt. Wie müssen die Welle und ihre Zapfen dimensionirt werden?

12) Eine keilförmige Stahlfeder von 50 cm Länge ist an einem Ende befestigt; unter dem Einfluss der Belastung 15 kg am anderen Ende soll die Durchbiegung 3 cm sein, während die grösste Spannung gleichzeitig $1500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ betragen darf. Man bestimme die Dicke und die grösste Breite der Feder unter Benützung des Wertes $E = 2500000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

13) Die Durchbiegung eines gleichförmig belasteten, an beiden Enden frei aufgelagerten Balkens soll mit Hülfe des Satzes von Mohr abgeleitet werden.

14) Ein Blechbalken von 8 m Länge ist an beiden Enden unterstützt; er trägt die Last 4 t in der Mitte und die gleichförmig verteilte Last 12 t. Die Höhe des Querschnittes ist 40 cm. Der Balken soll als ein Körper von annähernd gleicher Biegungsfestigkeit construirt werden; ausserdem bestimme man graphisch die grösste Durchbiegung.

15) Die Schubspannung in einem auf die Kante gelegten quadratischen Querschnitte soll bestimmt werden.

16) Man leite die analytischen Ausdrücke für die Normal- und Schubspannung in einem schiefen Schnitte eines auf Biegung beanspruchten Balkens ab, und berechne daraus den grössten und kleinsten Wert der Normalspannung.

Fünfter Abschnitt.

Drehungsfestigkeit.

§ 20.

Specielle Behandlung des Drehungsproblemes.

A. Innere Spannungen.

Besondere Annahmen.

Ein gerader stabförmiger Körper wird auf Drehung beansprucht, wenn Kräftepaare auf ihn wirken, deren Ebenen zur Stabaxe senkrecht sind. Dabei wird jeder Querschnitt hinsichtlich der benachbarten Querschnitte gedreht, wobei Spannungen im Querschnitte entstehen. Zunächst mögen folgende specielle Annahmen getroffen werden, welche die Behandlung der Aufgabe wesentlich vereinfachen.

1) *Die Querschnitte des Körpers seien Kreise oder Kreisringe.*

2) *Die Querschnitte bleiben eben während der Drehung und verändern ihre Form nicht.*

1) *In den Querschnitten entstehen nur Schubspannungen, welche senkrecht zu den zugehörenden Radien sind.*

Dass diese Annahmen mit einander verträglich sind, geht aus § 21 hervor, wo das Drehungsproblem allgemeiner behandelt wird.

Spannungen bei der Drehung.

Nach der Bedingung 2) besteht die Formänderung darin, dass ein Querschnitt sich in Bezug auf einen benachbarten Querschnitt dreht. Die Axe der Drehung muss infolge der Form des Körpers die geometrische Axe

sein. Daraus geht ferner hervor, dass die Verschiebung eines Punktes des Querschnittes senkrecht zu dem aus dem Mittelpunkte des Querschnittes, dem sog. ***Drehungsmittelpunkte*** gezogenen Radius ist; ihre Richtung stimmt folglich mit der Richtung der Schubspannung überein. Da die Spannung die Ursache der Verschiebung ist, so sind beide einander proportional, wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, somit auch proportional dem Abstande vom Drehungsmittelpunkte. Es bezeichne τ_r die specifische Schubspannung im Abstande r, τ diese Spannung am Umfang, dessen Radius e sei; dann ergiebt sich

$$\tau_r = \frac{r}{e}\tau. \tag{237}$$

Auf das Flächenelement dF (Fig. 137) wirkt die Kraft $\tau_r dF = \frac{r}{e}\tau\, dF$; ihre Projectionen auf zwei Axen im Querschnitte mit dem Drehungsmittelpunkte als Anfangspunkt sind $\frac{z}{e}\tau\, dF$ und $-\frac{y}{e}\tau\, dF$ bez. auf die y- und auf die z-Axe.

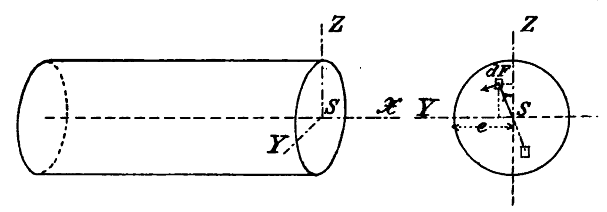


Fig. 137.

Da die äusseren Kräfte für den Querschnitt ein Kräftepaar mit einem Momente M, dem sog. ***Drehungsmomente*** liefern, so müssen auch die Schubspannungen zusammen ein Kräftepaar liefern, dessen Moment gleich und entgegengesetzt mit M ist. In der That kommen diese Spannungen, wie die Figur zeigt, paarweise vor, elementare Kräftepaare bildend. Für das über den ganzen Querschnitt

erstreckte resultirende Moment ergiebt sich, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\int r\tau_r\, dF = \int \frac{r^2}{e}\tau\, dF = \frac{\tau}{e}\int r^2\, dF.$$

Die Grösse $\int r^2 dF$ ist das polare Trägheitsmoment J_0 des Querschnittes in Bezug auf den Drehungsmittelpunkt. Man erhält also zur Berechnung der Schubspannung am Umfang

$$(238) \qquad \tau\frac{J_0}{e} = |M|.$$

Diese Gleichung ist völlig analog der Gleichung (105), p. 98 für die Biegungsspannung.

Dimensionirung. Besitzt der stabförmige Körper einen unveränderlichen Querschnitt, so ist die Spannung τ proportional dem Drehungsmomente. Beim Dimensioniren sucht man dann den Querschnitt auf, in dem $|M|$ ein Maximum ist, und setzt die Schubspannung am Umfang gleich der zulässigen Spannung t. Die so erhaltene Gleichung

$$(239) \qquad \frac{J_0}{e} = \frac{\max|M|}{t}$$

liefert das sog. *polare Widerstandsmoment* des Querschnittes.

Für einen kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d erhält man (siehe p. 78)

$$\frac{J_0}{e} = \frac{\pi d^3}{16},$$

$$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{\max|M|}{t}$$

und

$$(240) \qquad d = \sqrt[3]{\frac{16\max|M|}{\pi t}}.$$

Wenn der Querschnitt ein Kreisring mit dem inneren Durchmesser d und äusseren Durchmesser D ist, so ergiebt sich

$$\frac{J_0}{e} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}$$

und

$$\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{16 \max |M|}{\pi t}. \tag{241}$$

Ist der auf Drehung beanspruchte Körper ein Umdrehungskörper, dessen Querschnitt sich verändert, so sucht man das Maximum von $\frac{e\,|M|}{J_0}$ auf und setzt es gleich der zulässigen Schubspannung t:

$$t = \max \left| \frac{e\,M}{J_0} \right|. \tag{242}$$

B. Der Drehungswinkel.

Drehungswinkel.

Unter dem Drehungswinkel versteht man den Winkel, um welchen der eine Endquerschnitt sich in Bezug auf den anderen dreht. Es werde der einfache Fall betrachtet, in welchem der Stab einen constanten Querschnitt hat, an einem Ende eingespannt ist und am anderen Ende durch ein Kräftepaar vom Momente M angegriffen wird (Fig. 138). Die Figur 139 stellt ein Element des Stabes von der Länge dx dar. Ein Radius SA des einen Querschnittes dreht sich in Bezug auf den entsprechenden Radius $S'A'$ des anderen Querschnittes um den Winkel

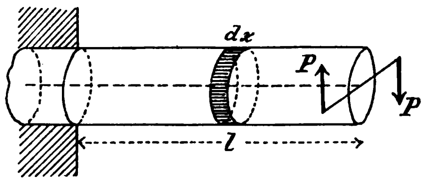


Fig. 138.

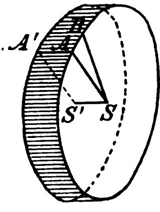


Fig. 139.

$$da = \frac{AB}{SA}.$$

Die Verschiebung AB des Punktes A am Umfang des ersteren Querschnittes in Bezug auf den Punkt A' des zweiten Querschnittes rührt von der Schubspannung τ her und hat nach p. 34 die Grösse

$$AB = \frac{\tau}{G} dx,$$

wo G der Elasticitätsmodul für Schub ist. Setzt man hier

$$\tau = \frac{e}{J_0} M$$

ein, so ergiebt sich

$$AB = \frac{e}{J_0 G} M dx$$

und

$$da = \frac{M}{J_0 G} dx.$$

Wenn dieser Ausdruck über die ganze Länge des Stabes integrirt wird, so erhält man für den Drehungswinkel

$$\alpha = \frac{Ml}{J_0 G}, \tag{243}$$

wo α dasselbe Vorzeichen wie M hat, je nach der Drehungsrichtung.

Der Drehungswinkel ist also proportional der Länge des gedrehten Stabes und dem Drehungsmomente und umgekehrt proportional dem polaren Trägheitsmomente des Querschnittes.

C. **Anwendungen.**

Transmissionswellen.

1) *Mit Hülfe einer Transmissionswelle aus Schmiedeisen, welche n Umdrehungen in der Minute macht, soll ein Arbeitseffect von N P.S. übertragen werden. Welchen Durchmesser erfordert die Welle?* Speciell wähle man $N = 20$, $n = 50$.

Bezeichnet man das in kgm ausgedrückte Drehungsmoment mit M, so ist der Effect

$$E = \frac{2\pi n M}{60} = 75\,N,$$

also

$$M = \frac{30 \,.\, 75\,N}{\pi n}. \tag{244}$$

Die Gleichung (240) liefert jetzt für den Durchmesser in cm

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 100 \,.\, M}{\pi t}} = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 30 \,.\, 75}{\pi^2 n t} \,.\, \frac{100\,N}{}}\ \text{cm}.$$

Wählt man für gewöhnliches gewalztes Eisen mit einem ziemlich hohen Sicherheitsgrade

$$t = 240\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

so ergiebt sich bei Ausführung der numerischen Rechnung rund

$$d \doteq 11.5 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}\ \text{cm}. \tag{245}$$

Man führt nicht nur eine Festigkeitsberechnung der Transmissionswellen auf Grund der Formel (245) aus, sondern verlangt ausserdem, dass der Drehungswinkel pro Längeneinheit einen gewissen Wert nicht überschreite, den Redtenbacher gleich $\frac{1}{4}°$ pro laufenden Meter annimmt. Setzt man in der Gleichung (243) $l = 1$ m $= 100$ cm, $\alpha = \frac{1}{4}° = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{180}$, $G = 800000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und beachtet die Gleichung (244), so erhält man

$$\text{M} = \frac{G J_0 \alpha}{l} = \frac{800000\,\pi d^4\,\pi}{32 \,.\, 100 \,.\, 4 \,.\, 180} = \frac{25\pi^2 d^4}{72} = \frac{30 \,.\, 75 \,.\, 100\,N}{\pi n};$$

daraus ergiebt sich

$$d = \sqrt[4]{\frac{72 \,.\, 90}{\pi^3} \,.\, \frac{100\,N}{n}}\ \text{cm}$$

und ausgeführt

$$d = 12.0 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}\ \text{cm}. \tag{246}$$

Eine Berechnung auf Drehung wird gewöhnlich bei relativ langen Transmissionswellen ausgeführt. Stellt man fest, dass der specifische Drehungswinkel die oben angegebene Grösse nicht überschreiten darf, so besteht eine gewisse Sicherheit, dass die Welle ihre Form nicht ändere. Nötigenfalls berechnet man den Durchmesser nach den beiden Formeln (245) und (246) und wählt den grösseren Wert.

2) *Man untersuche mit Hülfe der Resultate in der Anw. 1), für welche Werte des Verhältnisses* $\frac{N}{n}$ *die Transmissionswelle auf Festigkeit und für welche Werte sie auf Drehung berechnet werden muss, und bestimme den Durchmesser d, für welchen die beiden Berechnungen den gleichen Wert liefern.*

3) Die hohle gusseiserne Welle einer Turbine hat einen inneren Durchmesser 12 cm; auf sie wirkt das Drehungsmoment 150000 kg cm. Man berechne den äusseren Durchmesser unter der Annahme der zulässigen Beanspruchung $t = 100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Die Gleichung (241) liefert

$$\frac{D^4 - 12^4}{D} = \frac{16 \, . \, 150000}{\pi \, . \, 100},$$

also eine Gleichung vierten Grades für D. Die Gleichung könnte streng gelöst werden; einfacher verfährt man versuchsweise, z. B. so dass man auf der rechten Seite der Gleichung

$$D^3 = \frac{16 \, . \, 150000}{\pi \, . \, 100} + \frac{12^4}{D}$$

einen angenommenen Wert von D einsetzt und damit einen genaueren Wert berechnet. Nach einigen Einsetzungen findet man

$$d = 20.5 \text{ cm}.$$

§ 21.

Allgemeinere Behandlung des Torsionsproblemes.

A. Innere Spannungen.

Annahmen über den Querschnitt und die Spannungen.

Der der Drehung unterworfene stabförmige Körper soll einen unveränderlichen Querschnitt haben, von dem hinsichtlich seiner Form nur vorausgesetzt werde, dass er zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen besitze. Der Schnitt-

punkt dieser Axen ist der Schwerpunkt und auf Grund der Symmetrie auch der Drehungsmittelpunkt des Querschnittes. Bei der Drehung ändert der Querschnitt im allgemeinen seine Form, behält aber die beiden zu einander senkrechten Symmetrieaxen bei.

Bestimmung der Spannungen.

In Bezug auf die Spannungen wird nur vorausgesetzt, dass sie Schubspannungen sind. Die specifische Spannung τ in einem Punkte des Querschnittes, dessen Coordinaten in Bezug auf das von den beiden Symmetrieaxen gebildete System y und z sind (Fig. 140), hat in den Richtungen dieser Axen die Componenten τ_z und $-\tau_y$. In den drei Punkten, welche durch symmetrische Wiederholung des betrachteten Punktes in Bezug auf die Coordinatenaxen entstehen, sind die Spannungscomponenten die gleichen, besitzen aber teilweise die entgegengesetzten Richtungen, wie die Figur näher zeigt. Die Grössen τ_y und τ_z werden nach Potenzen von y und z entwickelt, und zwar sollen höhere Potenzen als die vierten vernachlässigt werden. Man hat somit z. B.

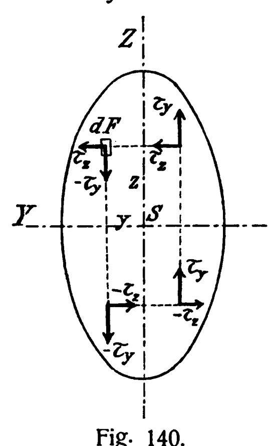


Fig. 140.

$$\tau_y = a + by + cz + dy^2 + eyz + fz^2 + \\ + gy^3 + hy^2z + kyz^2 + lz^3 + \\ + my^4 + ny^3z + py^2z^2 + qyz^3 + rz^4,$$

wo sämtliche Coefficienten unbekannt sind. Man beachtet ferner, dass τ_y das Zeichen ändern muss, wenn y das Zeichen ändert, und das Zeichen beibehalten muss, wenn z das Zeichen ändert, d. h. τ_y ist eine ungerade Function von y und eine gerade Function von z. Die erste Bedingung erfordert, dass

$$a = c = d = f = h = l = m = p = r = 0$$

sei, und die zweite Bedingung, dass ausserdem

$$e = n = q = 0$$

sei. Mit einer kleinen Abänderung der Bezeichnungen findet man daraus

$$\tau_y = my + m_1 yz^2 + m_2 y^3. \tag{247}$$

Ebenso muss τ_z gerade in Bezug auf y und ungerade in Bezug auf z sein, so dass sich

$$\tau_z = nz + n_1 y^2 z + n_2 z^3 \tag{248}$$

ergiebt.

Diese Ausdrücke für die Spannungscomponenten enthalten noch sechs Coefficienten, welche bestimmt werden müssen. Dabei benützt man folgende drei Bedingungen:

1) *Die Spannungen eines Querschnittes müssen auf ein Kräftepaar reducirt werden können, dessen Moment gleich und entgegengesetzt dem Drehungsmomente ist.*

2) *Die Spannungen an jedem kleinen Raumelemente des gedrehten Körpers müssen sich das Gleichgewicht halten.*

3) *Die Schubspannung hat in jedem Punkte des Umfangs des Querschnittes die Richtung der Tangente der Begrenzungslinie.*

Ist das Drehungsmoment M, ein Element des Querschnittes dF, so liefert die erste Bedingung die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\int \tau_y \, dF = 0, \int \tau_z dF = 0, \\ &\int (y\tau_y - z\tau_z) \, dF = M, \end{aligned} \tag{249}$$

wo die Integrale über den ganzen Querschnitt erstreckt werden müssen. Setzt man die Ausdrücke (247) und

(248) von τ_y und τ_z in die beiden ersten Gleichungen (249) ein, so findet man

$$m\int y\,dF + m_1\int yz^2 dF + m_2\int y^3 dF = 0,$$

$$n\int z\,dF + n_1\int zy^2 dF + n_2\int z^3 dF = 0.$$

Infolge der doppelten Symmetrie des Querschnittes sind diese Gleichungen identisch erfüllt, indem jedes Glied für sich gleich Null ist. Die dritte Gleichung (249) liefert

$$\begin{aligned} m\int y^2 dF - n\int z^2 dF + (m_1 - n_1)\int y^2z^2 dF + \\ + m_2\int y^4 dF - n_2\int z^4 dF = M. \end{aligned} \tag{250}$$

Die hier vorkommenden Grössen

$$B = \int z^2 dF,\ C = \int y^2 dF \tag{251}$$

sind die centralen Hauptträgheitsmomente des Querschnittes. Mit Anwendung dieser Bezeichnungen ist

$$mC - nB + (m_1 - n_1)\int y^2z^2 dF + m_2\int y^4 dF - n_2\int z^4 dF = M; \tag{252}$$

diese Gleichung muss also von den sechs Coefficienten in τ_y und τ_z erfüllt werden.

Um die zweite Bedingung auf p. 198 in Betracht zu ziehen, greift man auf die allgemeinen Gleichungen (3) in § 2, p. 15 zurück. Jetzt ist

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0,$$

$$\tau_x = 0,$$

$$X = Y = Z = 0,$$

und man erhält

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen sind identisch erfüllt; die dritte Gleichung liefert die Bedingung

$$m_1 + n_1 = 0. \tag{253}$$

Um die Richtigkeit der dritten Bedingung auf p. 198 zu erkennen, braucht man sich nur des Satzes auf p. 15 in § 2 zu erinnern, dass die in zwei auf einander senkrechten Schnitten wirkenden, zu der Kante normalen Schubspannungen gleich gross sein müssen. Denn hätte die Schubspannung am Umfange des Querschnittes eine zur Begrenzungslinie senkrechte Componente, so müsste es eine gleich grosse, längs der Oberfläche des Balkens wirkende der Balkenaxe parallele Kraft geben; diese Kraft könnte nur eine äussere Kraft sein, ist aber thatsächlich nicht vorhanden. Die Schubspannung am Umfange muss also eine tangentiale Richtung haben.

Bezeichnet α den im positiven Sinne gerechneten Winkel der Tangente der Begrenzungslinie des Querschnittes mit der positiven y-Axe (Fig. 141), so liefert die dritte Bedingung die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dy} = \frac{\tau_y}{\tau_z}. \tag{254}$$

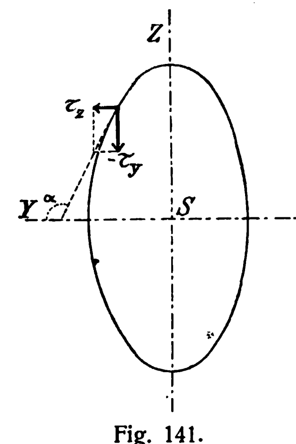


Fig. 141.

Die gefundenen Bedingungen (252), (253) und (254), denen die sechs Coefficienten in τ_y und τ_z genügen müssen, sind mit einander vereinbar; dies soll jedoch nur an einigen speciellen Querschnittsformen gezeigt werden.

Elliptischer Querschnitt.

Der Querschnitt sei eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dann ergiebt sich

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z};$$

mit Hülfe der Gleichungen (247) und (248) findet man ferner

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = \frac{my + m_1 yz^2 + m_2 y^3}{nz + n_1 zy^2 + n_2 z^3} = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

oder

$$\frac{m + m_1 z^2 + m_2 v^2}{n + n_1 y^2 + n_2 z^2} + \frac{c^2}{b^2} = 0.$$

Diese Gleichung muss für alle Punkte des Umfangs der Ellipse erfüllt sein. Zweckmässigerweise wählt man

$$m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0$$

und hat dann

$$mb^2 + nc^2 = 0,$$

wobei auch die Gleichung (253), d. h.

$$m_1 + n_1 = 0$$

befriedigt wird.[1]

Die Hauptträgheitsmomente der Ellipse sind

$$B = \frac{\pi}{4} bc^3; \; C = \frac{\pi}{4} cb^3, \tag{255}$$

und der Gleichung $mb^2 + nc^2 = 0$ kann daher auch die Form

$$mC + nB = 0$$

gegeben werden. Die Gleichung (252) nimmt jetzt die Form an:

$$mC - nB = M.$$

[1] Die obige Wahl ist specieller als notwendig wäre, denn eigentlich erhält man nur überall drei Gleichungen für die sechs Coefficienten.

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen findet man

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{M}{C};\ n = -\tfrac{1}{2}\frac{M}{B};$$

endlich sind die Spannungscomponenten

$$\tau_y = \tfrac{1}{2}\frac{M}{C}y;\ \tau_z = -\tfrac{1}{2}\frac{M}{B}z. \tag{256}$$

Im Punkte (y, z) ist die resultirende Spannung

$$\tau = \sqrt{\tau_y{}^2 + \tau_z{}^2} = \tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{y^2}{C^2} + \frac{z^2}{B^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{M}{bc}\sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}. \tag{257}$$

Längs eines Radius aus dem Mittelpunkte der Ellipse wächst die Spannung von dem Werte 0 im Mittelpunkte bis zu einem grössten Werte auf dem Umfang. Für Punkte des Umfangs ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung der Ellipse

$$\tau = \frac{2}{\pi}\frac{M}{b^2c}\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)}. \tag{258}$$

Es werde angenommen, dass $b < c$ ist, so dass

$$0 < 1 - \frac{b^2}{c^2} < 1$$

folgt. Die Spannung τ wird dann am grössten für $z = 0$, und zwar ergiebt sich

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi}\frac{M}{b^2c}. \tag{259}$$

Die grössten Schubspannungen kommen also in den Endpunkten der kleineren Hauptaxe der Ellipse vor, ein bemerkenswertes Resultat.

Wenn der Querschnitt ein Kreis vom Durchmesser d ist, so findet man

$$\tau_{max} = \frac{16M}{\pi d^3}$$

in Übereinstimmung mit der Formel (240).

Der Querschnitt sei ein von zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen begrenzter Ring (Fig. 142). Mit den Bezeichnungen in der Figur ergiebt sich für die äussere Ellipse die Bedingung

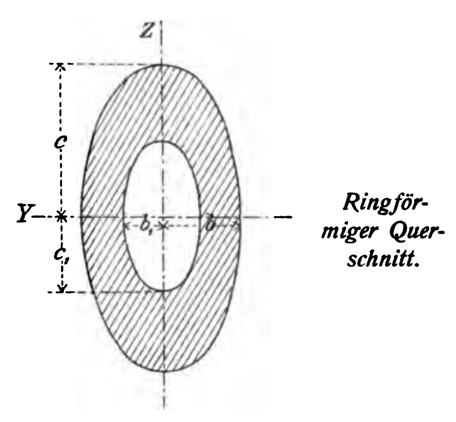


Fig. 142.

Ringförmiger Querschnitt.

$$\frac{m + m_1 z^2 + m_2 y^2}{n + n_1 y^2 + n_2 z^2} + \frac{c^2}{b^2} = 0$$

und für die innere Ellipse die Bedingung

$$\frac{m + m_1 z^2 + m_2 y^2}{n + n_1 y^2 + n_2 z^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2} = 0.$$

Da

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$$

ist, genügt man beiden Bedingungen, wenn man die Constanten in derselben Weise wie bei der Ellipse wählt. Somit wird

(260) $$\tau_y = \tfrac{1}{2} \frac{M}{C} y; \tau_z = -\tfrac{1}{2} \frac{M}{B} z,$$

(261) $$\tau = \tfrac{1}{2} M \sqrt{\frac{y^2}{C^2} + \frac{z^2}{B^2}},$$

mit

(262) $$B = \frac{\pi}{4} (bc^3 - b_1 c_1^3),$$

(262) $$C = \frac{\pi}{4}(cb^3 - c_1 b_1^3).$$

Wendet man die Bezeichnung

(263) $$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = a$$

an, wobei $0 < a < 1$ ist, so erhält man

(264) $$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M}{bc(1 - a^4)} \sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Die Spannung ist wieder am grössten in den Endpunkten der kleineren Axe und hat dort den Wert

(265) $$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{M}{b^2 c (1 - a^4)}.$$

Speciell ergiebt sich für einen Kreisring vom inneren Durchmesser d und äusseren Durchmesser D

$$\tau = \frac{16\, MD}{\pi (D^4 - d^4)}$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (241).

Rechteckiger Querschnitt.

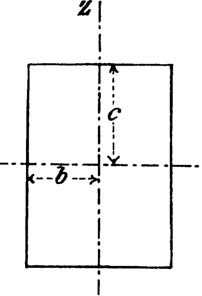


Fig. 143.

Zuletzt werde noch ein rechteckiger Querschnitt behandelt, dessen Seiten $2b$ und $2c$ sind (Fig. 143); man nehme an, dass $b < c$ ist. Die Hauptträgheitsmomente sind

(266) $$B = \tfrac{1}{12}(2b)(2c)^3 = \tfrac{4}{3} bc^3,$$
$$C = \tfrac{1}{12}(2c)(2b)^3 = \tfrac{4}{3} cb^3.$$

Gemäss der Bedingung für die Spannung am Umfang muss

$\tau_y = 0$ für $z = \pm c$, unabhängig von dem Werte von y,
$\tau_z = 0$ für $y = \pm b$, unabhängig von dem Werte von z sein.

Wählt man nach (247) und (248) wieder

$$\tau_y = my + m_1 yz^2 + m_2 y^3,$$
$$\tau_z = nz + n_1 zy^2 + n_2 z^3,$$

so liefern die Bedingungen

$$(m + m_1 c^2) y + m_2 y^3 = 0,$$
$$(n + n_1 b^2) z + n_2 z^3 = 0;$$

diese Gleichungen zerfallen ferner in

$$m_2 = n_2 = 0,$$

(267) $$m_1 = -\frac{m}{c^2};\ n_1 = -\frac{n}{b^2}.$$

Für die Spannungscomponenten ergiebt sich jetzt

(268) $$\tau_y = my\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad \tau_z = nz\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Zur Bestimmung von m und n hat man nach (252) und (253) die Gleichungen

(269) $$mC - nB + (m_1 - n_1)\int y^2 z^2\, dF = M, \quad m_1 + n_1 = 0.$$

Für das Rechteck wird

$$\int y^2 z^2\, dF = \int y^2\, dy . \int z^2\, dz = \tfrac{4}{9}\, b^3 c^3 =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, Bb^2 = \tfrac{1}{3}\, Cc^2$$

erhalten; die Gleichungen (269) ergeben dann

$$\tfrac{2}{3}\, mC - \tfrac{2}{3}\, nB = M,$$
$$mC + nB = 0$$

und durch Auflösung folgt

$$m = \tfrac{3}{4}\frac{M}{C}, \; n = -\tfrac{3}{4}\frac{M}{B}.$$

Danach sind die Spannungscomponenten

$$(270) \qquad \begin{aligned} \tau_y &= \tfrac{3}{4}\frac{M}{C} y \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \\ \tau_z &= -\tfrac{3}{4}\frac{M}{B} z \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \end{aligned}$$

und die resultirende Spannung im Punkte (y, z) des rechteckigen Querschnittes

$$(271) \qquad \begin{aligned} \tau &= \tfrac{3}{4} M \sqrt{\frac{y^2}{C^2}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 + \frac{z^2}{B^2}\left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right)^2} = \\ &= \tfrac{9}{16}\frac{M}{bc} \sqrt{\frac{y^2}{b^4}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^4}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist mit

$$\tau = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2 c} \sqrt{\frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 + \frac{b^2}{c^2}\frac{z^2}{c^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}$$

identisch. Bezeichnet man die Grösse unter dem Wurzelzeichen mit R, so hat man mit der getroffenen Annahme $b < c$

$$R \lesseqgtr \frac{y^2}{b^2} + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$

oder

$$R \lesseqgtr 1 - \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Der grösste Wert von R ist 1 und entspricht

$$z = 0 \text{ und } y^2 = b^2.$$

In einem rechteckigen Querschnitte kommen also die grössten Schubspannungen bei der Drehung in den Halbirungspunkten der längeren Seiten vor. Diese grösste Spannung beträgt

$$\tau_{\max} = \frac{9}{16}\frac{M}{b^2c}. \tag{272}$$

In den Ecken des Rechteckes ist $\tau = 0$.

Für ein Quadrat von der Seite s ergiebt sich

$$\tau_{\max} = \frac{9}{2}\frac{M}{s^3}. \tag{273}$$

B. **Der Drehungswinkel.**

Ableitung einer allgemeinen Formel für den Drehungswinkel.

Der Drehungswinkel ist derjenige Winkel, um den die Symmetrieaxen des einen Endquerschnittes sich in Bezug auf die Symmetrieaxen des anderen Endquerschnittes drehen. Statt dieses Winkels α soll der auf die Längeneinheit bezogene Drehungswinkel ϑ berechnet werden. Für einen an einem Ende eingespannten Stab von der Länge l, an dessen anderem Ende ein drehendes Kräftepaar wirkt, ist dabei

$$\alpha = \vartheta l. \tag{274}$$

Man betrachte ein Stück des stabförmigen Körpers zwischen den Querschnitten F im Abstande x und F' im Abstande $x + dx$ vom freien Ende aus und wähle eine Strecke PQ im Querschnitte F, parallel der y-Axe und von der Länge dy; im ursprünglichen Zustande des Körpers sei $P'Q'$ die entsprechende Strecke im Querschnitte F'. Die Punkte P, P', Q, Q' haben dann der Reihenfolge nach die Coordinaten x, y, z; $x + dx, y, z$; $x, y + dy, z$; $x + dx, y + dy, z$. Mit Anwendung der Bezeichnungen in § 3 erhält man als der z-Axe parallele Componente der Verschiebung des Punktes P' relativ zu P

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx$$

und als derselben Axe parallele Componente der Verschiebung von Q' relativ zu Q

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} dx\, dy.$$

Der Unterschied der letzteren und der ersteren Verschiebung ist also

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} dx\, dy,$$

und der Winkel, um den sich $P'Q'$ parallel der yz-Ebene relativ zu PQ gedreht hat, ist gleich

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} dx.$$

Nach der Drehung schliessen die Symmetrieaxen der Querschnitte mit einander den Winkel ϑdx ein. Wählt man den Punkt P auf der y-Axe, indem man in dem obigen Ausdrucke $z = 0$ einsetzt, so muss also die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)_{z=0} dx = \vartheta dx,$$

d. h.

$$\vartheta = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)_{z=0} \tag{275}$$

bestehen. Würde man den Punkt P in der z-Axe und die Strecke PQ längs dieser Axe wählen, so erhielte man in derselben Weise

$$\vartheta = -\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z}\right)_{y=0}. \tag{276}$$

Zwischen den Verschiebungscomponenten ξ, η, ζ und den Spannungscomponenten τ_y und τ_z bestehen gemäss (17) und (29) die Beziehungen

$$\tau_y = G\gamma_y = G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right),$$

$$\tau_z = G\gamma_z = G\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right).$$

Setzt man hier die Werte (247) und (248) von τ_y und τ_z ein, so ergiebt sich

$$\tau_y = my + m_1 yz^2 + m_2 y^3 = G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right),$$

$$\tau_z = nz + n_1 zy^2 + n_2 z^3 = G\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right).$$

Durch Differentiation findet man hieraus

$$\frac{\partial\tau_y}{\partial y} = m + m_1 z^2 + 3m_2 y^2 = G\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial\tau_z}{\partial z} = n + n_1 y^2 + 3n_2 z^2 = G\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z}\right).$$

In der ersten dieser Gleichungen setze man $z = 0$, in der zweiten $y = 0$; mit Bezug auf die Formeln (275) und (276) ergiebt sich dabei

$$m + 3m_2 y^2 = G\left\{\vartheta + \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z}\right)_{z=0}\right\},$$

$$n + 3n_2 z^2 = G\left\{\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z}\right)_{y=0} - \vartheta\right\}.$$

Nimmt man schliesslich in der ersten dieser Gleichungen $y = 0$, in der zweiten $z = 0$ und bildet die Differenz, so verschwindet die Grösse

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z}\right)_{y=0,\, z=0}$$

und man erhält für den Drehungswinkel den Ausdruck

(277) $$\vartheta = \tfrac{1}{2} \frac{m - n}{G}.$$

Anwendung auf specielle Querschnitte. Ellipse.

Diese Formel liefert für die unter A oben behandelten speciellen Querschnitte:

für die Ellipse

(278) $$\vartheta = \tfrac{1}{4} \frac{M}{G}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) = \frac{M(b^2 + c^2)}{\pi G b^3 c^3},$$

Kreis.

für den Kreis

(279) $$\vartheta = \frac{M}{J_0 G} = \frac{32 M}{\pi G d^4},$$

Kreisring.

für den Kreisring

(280) $$\vartheta = \frac{M}{J_0 G} = \frac{32 M}{\pi G (D^4 - d^4)},$$

Rechteck.

für ein Rechteck mit den Seiten b und h

(281) $$\vartheta = \tfrac{3}{8} \frac{M}{G}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) = \frac{9 M (b^2 + h^2)}{2 G b^3 h^3},$$

Quadrat.

für ein Quadrat mit der Seite s

(282) $$\vartheta = \frac{9 M}{G s^4}.$$

Experimentelle Ergebnisse.

Bei der experimentellen Prüfung der jetzt dargelegten Drehungstheorie, welche nur auf Versuche über den Drehungswinkel gegründet werden kann, hat Wertheim gefunden, dass die Gleichung

$$\vartheta = \tfrac{1}{4} \frac{M}{G}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)$$

im allgemeinen sowohl für kreis- oder kreisringförmige, als auch für elliptische Querschnitte mit den Versuchen gut übereinstimmende Resultate liefert, während die für das Rechteck erhaltene Gleichung

$$\vartheta = \tfrac{3}{8} \frac{M}{G} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right)$$

meistens etwas zu grosse Werte liefert, um so grösser, je mehr sich das Rechteck einem Quadrate nähert. Im Mittel nimmt Wertheim dabei für Metalle und Glas

$$G = \tfrac{1}{2} \frac{m}{m+1} E = 0.38 \, E$$

an, dem Werte $m = 3.18$ entsprechend (siehe p. 35).

Zweckmässigerweise benützt man eine Formel von der Form

$$\vartheta = \frac{n}{4} \frac{M}{G} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) \tag{283}$$

und wählt $n = 1$ für kreisförmige und elliptische,
$n = 1.2$ für quadratische,
$n = 1.2$ bis 1.5 für rechteckförmige Querschnitte, je nach deren Länge. Die Zahl n zeigte sich in gewissem Masse von der Grösse des Drehungsmomentes und der Länge des Versuchsstabes abhängig.

C. Anwendungen.

1) Eine 3 m lange Welle aus Eichenholz, mit quadratischem Querschnitt, wird durch ein Kräftepaar gedreht, das aus zwei Kräften von je 200 kg am Umfange eines Rades von 1.5 m Halbmesser gebildet wird. Man berechne die Seitenlänge des Quadrates und den Drehungswinkel.

Wählt man $t = 15 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, so liefert die Formel (273)

$$t = \frac{9}{2} \frac{M}{s^3}$$

und

$$s = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\frac{M}{t}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\frac{2 \,.\, 200 \,.\, 150}{15}} = 26.2 \text{ cm}.$$

Aus der Gleichung (283) ergiebt sich der specifische Drehungswinkel

$$\vartheta = \frac{1.2}{4}\frac{M}{G}\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) = 7.2\,\frac{M}{Gs^4},$$

und der ganze Drehungswinkel wird, in Graden gerechnet,

$$\alpha = \frac{180}{\pi}\,\vartheta l = \frac{180 \times 7.2 \times 60000 \times 300}{\pi \times 8000 \times 26.2^4} = 2^\circ.0.$$

2) Zwei Stäbe haben gleich grossen Querschnitt, und zwar ist der eine Querschnitt ein Kreis vom Durchmesser d, der andere ein Quadrat von der Seite s. Man hat also

$$\frac{\pi d^2}{4} = s^2.$$

Die grösste Schubspannung bei der Drehung des kreisförmigen Stabes ist

$$\tau_{\max} = \frac{16M}{\pi d^3}$$

und bei der Drehung des quadratischen Stabes

$$\tau'_{\max} = \frac{9}{2}\frac{M}{s^3};$$

also ergiebt sich für das Verhältnis dieser Spannungen

$$\frac{\tau'_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{9\pi d^3}{2 \,.\, 16 s^3} = \frac{9\pi.8}{2 \,.\, 16 \,.\, \pi\sqrt{\pi}} = 1.27.$$

Die specifischen Drehungswinkel sind

$$\vartheta = \frac{32M}{\pi G d^4},$$

$$\vartheta' = 7.2\,\frac{M}{Gs^4},$$

ihr Verhältnis

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{7.2\pi d^4}{32 s^4} = \frac{7.2\,\pi \,.\, 16}{32.\pi^2} = 1.15.$$

§ 22.

Übungsaufgaben zur Lehre von der Drehungsfestigkeit.

1) Ein cylindrischer Stahlstab von 1 m Länge und 2 cm Querschnittsdurchmesser verlängert sich unter der Einwirkung einer axialen Zugkraft von 5 t um 0.75 mm und zeigt unter dem Einfluss eines 1.2 tcm grossen Drehungsmomentes den Drehungswinkel 5°.1. Man berechne daraus die Elasticitätsmoduln E und G des Stahles sowie die in der Formel (26) enthaltene Zahl m.

2) Eine hohle gusseiserne Welle von 10 cm innerem und 20 cm äusserem Durchmesser ist auf Drehung beansprucht. Die grösste Schubspannung ist dabei $t = 120 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Welchen Durchmesser muss eine massive Welle aus Schmiedeisen besitzen, die die gusseiserne Welle ersetzen soll?

3) Ein Erdbohrer, dessen unterstes Stück einen quadratischen Querschnitt von 30 mm Seitenlänge hat, wird von vier Mann gedreht. Jeder Mann übt eine Kraft von 15 kg an einem 0.75 m langen Hebelarme aus. Welche Spannung entsteht dabei?

4) Ein auf Drehung beanspruchter Körper hat die Form eines abgestumpften Kegels, der allmählich schmäler wird. Man berechne den Drehungswinkel.

5) Wie muss das Verhältnis der Seitenlängen eines Rechtecks gewählt werden, damit bei gegebenen Werten des Drehungsmomentes und der zulässigen Beanspruchung, der specifische Drehungswinkel ein Maximum erreiche?

Sechster Abschnitt.

Zusammengesetzte Festigkeit.

§ 23.

Zug oder Druck und Biegung.

A. Specielle Behandlung.

Annahmen. Auf den geraden, stabförmigen Körper mögen Kräfte wirken, welche sich für jeden Querschnitt auf eine Resultirende R_n längs der Stabaxe und ein Kräftepaar vom Momente M_n in einer zum Querschnitt senkrechten Ebene durch die Stabaxe reduciren (siehe § 5). R_n und M_n liefern zusammen eine einzige Kraft von der Grösse R_n, welche senkrecht zum Querschnitt ist und in der Ebene des Kräftepaares in dem Abstande $\frac{M_n}{R_n}$ von der Stabaxe liegt. Der Einfachheit wegen werde wie in der Lehre von der Biegungsfestigkeit vorausgesetzt, dass die Ebene des Kräftepaares eine Symmetrieebene des Stabes sei.

Spannungen. Die axiale Kraft möge mit P statt mit R_n bezeichnet und positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem sie, wenn sie allein wäre, normale Zug- oder Druckspannungen im Querschnitte verursachen würde. Ist F der Flächeninhalt des Querschnittes, so ist die von P verursachte Spannung

$$\sigma_1 = \frac{P}{F},$$

sie wird ebenfalls positiv oder negativ gerechnet.

Das Moment des Kräftepaares werde statt mit M_n kürzer mit M bezeichnet. M veranlasst normale Biegungsspannungen im Querschnitt; in dem Abstande y von der durch den Schwerpunkt des Querschnittes geführten Normalen zur Symmetrieebene des Stabes hat diese Spannung die Grösse

$$\sigma_2 = \pm \frac{y}{J} M,$$

wo J das centrale Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnet.

Wenn P und M gleichzeitig wirken, so entsteht eine normale Spannung von der Grösse

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{F} \pm \frac{y}{J} M. \tag{284}$$

Denselben Ausdruck würde man auch erhalten, wenn man $\sigma = \alpha + \beta y$ in den Gleichgewichtsbedingungen einsetzen und die Constanten α und β daraus bestimmen würde.

Die grössten und kleinsten Werte der Spannung kommen in den äussersten Fasern des Querschnittes vor und entsprechen dem Abstande $y = e$ (e' oder e'', siehe p. 99). Sie sind

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{e}{J} M. \tag{285}$$

Bei der Dimensionirung des stabförmigen Körpers sucht man den Querschnitt auf, in welchem $\left|\frac{P}{F} \pm \frac{e}{J} M\right|$ ein Maximum ist, und setzt diese numerisch grösste Spannung gleich der zulässigen Spannung:

$$s = \max \left|\frac{P}{F} \pm \frac{e}{J} M\right|. \tag{286}$$

Neutrale Axe. Die Gleichung (284) ergiebt $\sigma = 0$ für

$$y = \mp \frac{PJ}{FM} = y_0. \tag{287}$$

Die Gerade, in deren Punkten $\sigma = 0$ ist, ist parallel der Axe des Trägheitsmomentes J und liegt auf derjenigen Seite von dieser Axe, wo die von P und M herrührenden Spannungen entgegengesetzt gerichtet sind; sie heisst die *neutrale Axe* des Querschnittes wie bei der reinen Biegung. Wenn die neutrale Axe den Querschnitt schneidet, so kommen sowohl Zug- als auch Druckspannungen vor; schneidet sie den Querschnitt nicht, so ist die Beanspruchung überall von derselben Art, entweder Zug oder Druck. In dem zwischen beiden liegenden Grenzfalle berührt die neutrale Axe die Begrenzungslinie des Querschnittes. Bezeichnet man den Abstand eines Punktes des Querschnittes von der neutralen Axe mit ζ, so erhält man

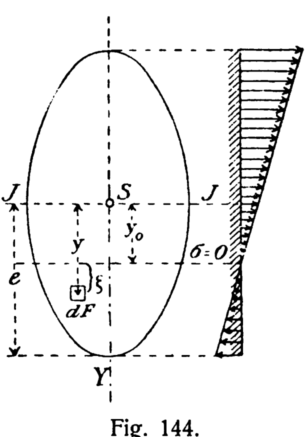


Fig. 144.

$$\zeta = y - y_0$$

und

$$\sigma = \pm \frac{M}{J}\left(y \pm \frac{PJ}{FM}\right) = \pm \frac{M}{J}(y - y_0) = \pm \frac{M}{J}\zeta. \tag{288}$$

Die Spannung ist somit proportional dem Abstande von der neutralen Axe; sie kann durch die Ordinaten einer durch diese Axe geführten, gegen den Querschnitt geneigten Ebene dargestellt werden (Fig. 144). In den Punkten der zur neutralen Axe parallelen Schwerpunktaxe ist die Spannung unabhängig vom Momente M und hat den Wert $\frac{P}{F}$, gerade so als ob P allein wirken würde.

Von einer Druckkraft P wird stets vorausgesetzt, dass sie kleiner sei als die Kraft, durch welche der Körper auf Zerknickung beansprucht werden würde.

Excentrische Belastung in der Längsrichtung eines Stabes.

Einen speciellen Fall der jetzt behandelten Art von zusammengesetzter Festigkeit bietet ein prismatischer Balken dar, der von einer in der Längsrichtung wirkenden, excentrisch angebrachten Belastung P angegriffen wird (Fig. 145). Ist der Abstand der Kraft P von der Balkenaxe gleich p, so erhält man

$$M = Pp$$

Fig. 145.

und in den äussersten Fasern die Spannungen

$$\sigma' = \frac{P}{F} + \frac{e'}{J} Pp = P\left(\frac{1}{F} + \frac{pe'}{J}\right),$$

$$\text{(289)} \qquad \sigma'' = \frac{P}{F} - \frac{e''}{J} Pp = P\left(\frac{1}{F} - \frac{pe''}{J}\right).$$

Speciell ergiebt sich für einen rechteckigen Querschnitt, bei dem die Belastung von der centrischen Lage S (Fig. 146) nach der einen Kante A verschoben wird,

$$\text{(290)} \qquad \sigma' = \max|\sigma| = P\left(\frac{1}{bh} + \frac{\frac{h}{2}\,\frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3}\right) = 4\frac{P}{bh},$$

d. h. *durch diese Verschiebung der Last wird die Anstrengung vervierfacht.*

Von der grössten Bedeutung ist es deshalb, dass eine Belastung, welche bei der Berechnung als centrisch vorausgesetzt wird, bei der Ausführung wirklich centrisch ist.

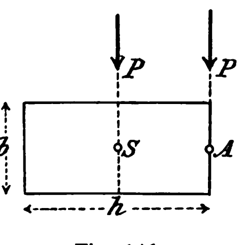


Fig. 146.

Belastungen in der Längs- und in der Querrichtung. Die in diesem Paragraphen aufgestellten Formeln sind auch anwendbar, wenn das Biegungsmoment M von Kräften herrührt, welche senkrecht zur Balkenaxe sind (Fig. 147). Bei der durch diese Kräfte verursachten Biegung entstehen zwar ausser den normalen Spannungen auch Schubspannungen in den Querschnitten; diese letzteren können aber in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

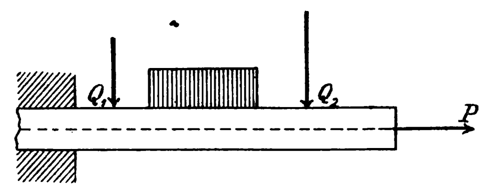


Fig. 147.

Die numerisch grösste Spannung kommt an der einen Kante eines gewissen gefährlichen Querschnittes vor.

Schief befestigter Stab. Ein schief eingespannter Balken (Fig. 148) bilde den Winkel α mit der Verticalen und sei am freien Ende mit einem Gewicht P belastet. P hat zwei Componenten, von welchen $P \cos \alpha$ Zug oder Druck veranlasst, und $P \sin \alpha$ den Balken auf Biegung beansprucht. Das grösste Biegungsmoment kommt im Einspannungsquerschnitte vor und beträgt $Pl \sin \alpha$. In dem gleichen Querschnitte sind die Spannungen an den Kanten

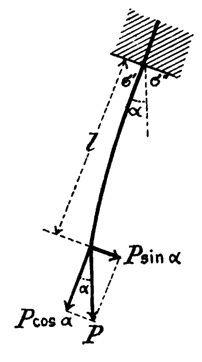


Fig. 148.

$$\sigma' = P\left(\frac{\cos \alpha}{F} + \frac{e' l \sin \alpha}{J}\right),$$

(291)

$$\sigma'' = P\left(\frac{\cos \alpha}{F} - \frac{e'' l \sin \alpha}{J}\right).$$

B. **Allgemeinere Behandlung.**

Annahmen. Ein Querschnitt möge zwei zu einander senkrechte, im Schwerpunkte sich schneidende Symmetrieaxen be-

sitzen; auf ihn wirke eine normale Kraft P in einem Punkte P, mit den Coordinaten ξ und η in Bezug auf ein von den beiden Symmetrieaxen gebildetes Coordinatensystem (Fig. 149). Die beiden Symmetrieaxen sind die beiden centralen Hauptträgheitsaxen des Querschnittes (Würde es keine Symmetrieaxen geben, so würden die Hauptcentralaxen an ihre Stelle treten). Die Ebene durch die Kraft P und den Schwerpunkt des Querschnittes heisst *Belastungsebene.* Es wird verlangt, die normale Spannung in einem beliebigen Punkte (x, y) des Querschnittes zu bestimmen. Am einfachsten ersetzt man P durch eine dazu parallele und gleiche grosse Kraft P im Schwerpunkte S und ein Kräftepaar, das in der Belastungsebene liegt und das Moment $M = P\varrho = P\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ besitzt. Dieses Kräftepaar wird noch in zwei andere zerlegt, welche in den Symmetrieebenen des Balkens liegen; die Axe $M \cos \alpha$ des einen fällt in die positive y-Axe, die Axe $-M \sin \alpha$ des anderen in die positive x-Axe. Die in S wirkende Kraft P veranlasst die constante Spannung

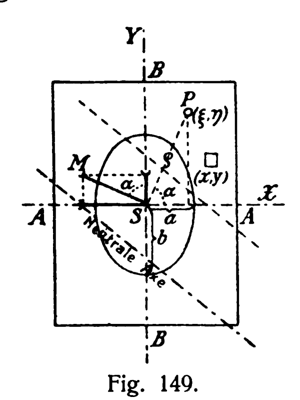


Fig. 149.

Belastungsebene.

Spannung.

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}$$

im Querschnitte, wobei die Zeichen wie auf p. 214 gerechnet werden. Das Kräftepaar $M \cos \alpha$ veranlasst im Punkte (x, y) die Biegungsspannung

$$\sigma_2 = \frac{xM \cos \alpha}{B},$$

wo B das Trägheitsmoment in Bezug auf die y-Axe ist, und das Kräftepaar $M \sin \alpha$ in demselben Punkte die Biegungsspannung

$$\sigma_3 = \frac{yM \sin \alpha}{A},$$

wo A das Trägheitsmoment in Bezug auf die x-Axe bezeichnet. Die resultirende Normalspannung im Punkte (x, y) ist also

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

d. h.

(292) $$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M \cos \alpha}{B} x + \frac{M \sin \alpha}{A} y.$$

Diesem Ausdrucke kann auch die Form

(293) $$\sigma = P\left(\frac{1}{F} + \frac{\xi x}{B} + \frac{\eta y}{A}\right)$$

erteilt werden. Gilt es die Spannung σ zu discutiren, so beachtet man zunächst, dass σ längs paralleler, gerader Linien, welche mit der x-Axe einen durch die Gleichung

(294) $$\operatorname{tg} \beta \,.\, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$$

Neutrale Axe.

bestimmten Winkel β einschliessen, constante Werte annimmt. Unter diesen Geraden giebt es eine, die neutrale Axe des Querschnittes, in deren Punkten σ gleich Null ist. Sie hat mit x und y als laufenden Coordinaten die Gleichung

(295) $$\frac{\xi x}{B} + \frac{\eta y}{A} + \frac{1}{F} = 0.$$

Führt man hier die Halbaxen der Centralellipse (siehe p. 72)

$$a = \sqrt{\frac{B}{F}};\ b = \sqrt{\frac{A}{F}}$$

ein, so erhält man

(296) $$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = -1.$$

Bekanntlich stellt die Gleichung

$$(297) \qquad \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1$$

die Polare des Punktes P in Bezug auf die Centralellipse dar; die Gleichung (296) gehört daher zu einer Geraden, welche symmetrisch zu dieser Polaren in Bezug auf den Schwerpunkt des Querschnittes ist. Sie heisst die Antipolare des Angriffspunktes der Kraft P in Bezug auf die Centralellipse und ist also identisch mit der neutralen Axe des Querschnittes. Man construirt sie einfach auf folgende von Mohr angegebene Weise, wobei die Centralellipse nicht gezeichnet zu sein braucht, sondern nur ihre Halbaxen gegeben sein müssen (Fig. 150). Die Fusspunkte N_1 und N_2 der Senkrechten von P auf die Axen der Ellipse werden mit den Endpunkten D und C bez. der um 90° gedrehten Halbaxen der Centralellipse verbunden; in diesen Punkten D und C construirt man dann Senkrechte zu den Verbindungsgeraden. Diese Senkrechten schneiden die Coordinatenaxen in zwei Punkten G und F; die Gerade, welche diese beiden Punkte verbindet, ist die neutrale Axe. Der Beweis gründet sich auf eine einfache Berechnung der Abstände SF und SG aus den ähnlichen Dreiecken SFC und SCN_2 sowie SGD und SDN_1.

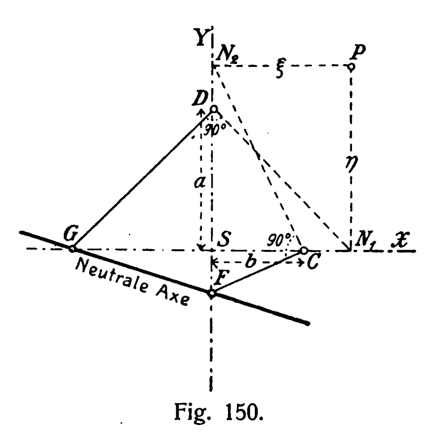


Fig. 150.

Umgekehrt findet man mit Hülfe derselben Construction zu einer gegebenen neutralen Axe den zugehörenden Angriffspunkt P. Der Punkt P liegt symmetrisch in

Bezug auf S zu dem Pol der neutralen Axe in Bezug auf die Centralellipse und heisst deshalb auch Antipol.

Für den Abstand ζ des Punktes (x, y) von der neutralen Axe hat man den Wert

$$\zeta = \frac{\frac{M\cos\alpha}{B}x + \frac{M\sin\alpha}{A}y + \frac{P}{F}}{M\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{B^2} + \frac{\sin^2\alpha}{A^2}}};$$

die Gleichung (292) liefert damit für die Spannung

$$\sigma = M\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{B^2} + \frac{\sin^2\alpha}{A^2}}\,\zeta, \tag{298}$$

d. h. *die Spannung ist proportional dem Abstande von der neutralen Axe.* Die extremen Werte der Spannung kommen in den Punkten des Umfangs vor, welche den grössten, bez. kleinsten Abstand von der neutralen Axe besitzen. Bei der Dimensionirung ist wie immer der numerisch grösste dieser Werte bestimmend.

Es mag hervorgehoben werden, dass die Gleichung (292) auch für den Fall gilt, dass $P=0$ ist. Dann wirkt ein Kräftepaar M in einer zum Querschnitt senkrechten Ebene. Die neutrale Axe geht durch den Schwerpunkt und ist sowohl Polare als auch Antipolare zu dem Punkte P, der unendlich fern in der Belastungsebene liegt. Die Spannungen im Querschnitt sind reine Biegungsspannungen.

Kern des Querschnittes.

Die Untersuchung der Normalspannungen in einem Querschnitt wird noch erleichtert durch Einführung des sog. Kerns des Querschnittes. Lässt man die neutrale Axe nach und nach mit den Tangenten der Begrenzungslinie des Querschnittes zusammenfallen, so bewegt sich der Angriffspunkt P längs einer geschlossenen Linie um den Schwerpunkt S; die Fläche innerhalb dieser Linie ist der Kern (Fig. 151 und 152). Einer geradlinigen Seite des Umfanges des Querschnittes entspricht ein Eckpunkt der

Kernlinie, einem Eckpunkte auf dem Umfang des Querschnittes eine geradlinige Seite der Begrenzung des Kerns.

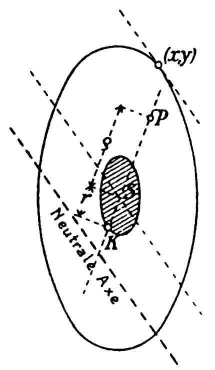


Fig. 151.

In Übereinstimmung mit seiner Entstehungsart hat der Kern des Querschnittes die Eigenschaft, dass wenn die Kraft P innerhalb desselben angreift, alle Spannungen im Querschnitt Zugspannungen oder alle Druckspannungen sind, während es sowohl Zug- als auch Druckspannungen giebt, wenn P ausserhalb des Kerns angreift. Im ersteren Falle schneidet die neutrale Axe den Querschnitt nicht, im letzteren Falle schneidet sie den Querschnitt.

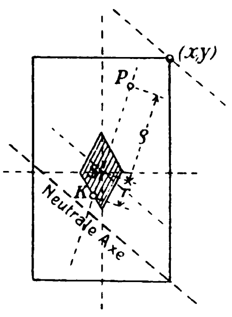


Fig. 152.

Neuer Ausdruck für die Spannung.

Mit Anwendung des Kerns kann man einen bemerkenswerten Ausdruck für die grösste Spannung (in einem Punkte des Umfangs) ableiten. Man verbinde den Angriffspunkt P der Kraft mit dem Schwerpunkte S und verlängere die Verbindungslinie bis zu dem Schnittpunkte K mit dem Kernumfang. Der Abstand $SK = r$ ist die sog. Kernweite. Der Punkt K ist der Antipol zu einer gewissen Tangente des Querschnittsumfanges; es seien x und y die Coordinaten des Berührungspunktes. Wenn die Kraft in irgend einem Punkte der Geraden PK angreift, so ist die neutrale Axe des Querschnittes parallel der genannten Tangente, speciell auch für P als Angriffspunkt; unter allen Punkten des Umfanges hat der Punkt (x, y) den grössten Abstand von der neutralen Axe und die Spannung erreicht in ihm ihr Maximum. Würde man unter ξ, η die Coordinaten des Kernpunktes K verstehen, so wäre nach (295)

$$\frac{\xi x}{B} + \frac{\eta y}{A} + \frac{1}{F} = 0$$

die Gleichung der Tangente des Umfanges. Setzt man hier

$$\xi = -r \cos \alpha; \eta = -r \sin \alpha$$

ein, so ergiebt sich

$$\frac{1}{Fr} = \frac{\cos \alpha}{B} x + \frac{\sin \alpha}{A} y.$$

Die Gleichung (292) liefert dann für die Spannung im Punkte (x, y) den Ausdruck

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{Fr}. \tag{299}$$

Bezeichnet man den Abstand zwischen den Punkten P und K mit f, so hat man ferner

$$f = r + \varrho = r + \frac{M}{P}$$

und

$$\sigma = \frac{P}{F} \frac{f}{r}$$

oder

$$\sigma = \sigma_s \frac{f}{r}, \tag{300}$$

wo σ_s die Spannung im Schwerpunkte ist.

Gefährlichste Belastungsebene. Für gegebene Werte von P und M ist σ am grössten, wenn die Kernweite r am kleinsten ist. Die dazu entsprechende Belastungsebene heisst g e f ä h r l i c h s t e B e l a s t u n g s e b e n e.

Kern einiger Querschnitte. Für die gewöhnlichen einfachen Querschnittsformen bestimmt man ohne Schwierigkeit den Kern und die kleinste Kernweite.

Rechteck. Der Kern eines R e c h t e c k e s (Fig. 153) ist ein Rhombus, dessen Diagonalen mit den mittleren Dritteln der

Symmetrieaxen zusammenfallen. Die kleinste Kernweite ist der Abstand des Schwerpunktes des Rechtecks von den Seiten des Rhombus; er hat den Wert

$$r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2+h^2}} \tag{301}$$

und entspricht einer gefährlichsten Belastungsebene, welche senkrecht auf einer Diagonale des Rechteckes steht.

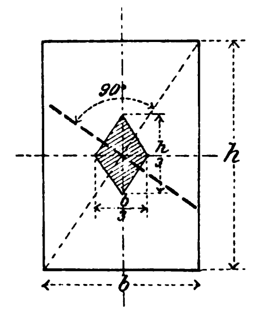


Fig. 153.

Quadrat.

Für ein Quadrat von der Seitenlänge s (Fig. 154) ist der Kern ein auf die Kante gestelltes Quadrat, dessen Seite die Länge $\frac{\sqrt{2}}{6}s$ hat. Ferner hat man

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{12}s = 0.1178\,s. \tag{302}$$

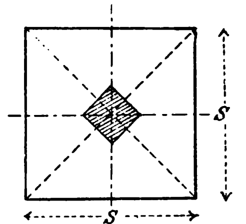
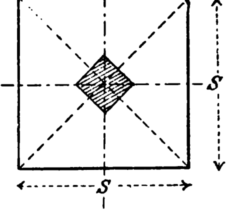



Fig. 154.

Kreis.

Ein Kreis (Fig. 155) hat einen kreisförmigen Kern mit dem Radius

$$r = r_{\min} = \frac{d}{8}. \tag{303}$$

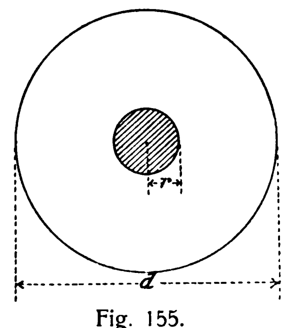


Fig. 155.

Kreisring.

Für einen Kreisring (Fig. 156) berechnet man als Radius des kreisförmigen Kerns

$$r = r_{\min} = \frac{2J}{FD} = \frac{D^2+d^2}{8D} = \frac{D}{8}\left\{1+\left(\frac{d}{D}\right)^2\right\}. \tag{304}$$

C. Anwendungen.

Console.

1) Die Spannungen einer Console aus Schmiedeisen (Fig. 157), welche eine gleichförmig verteilte Belastung Q trägt.

Man kann annehmen, dass Q sich zur Hälfte auf die Mauer und zur Hälfte auf A verteile; dabei entsteht die Zugkraft

$$H = \frac{l}{2h} Q$$

und der Druck in der Strebe

$$P = \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{2h} Q.$$

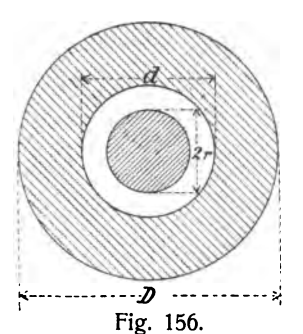


Fig. 156.

Fig. 157.

Die erstere erzeugt die Zugspannung $\frac{H}{F}$ in dem Consolbalken, der ausserdem durch die gleichförmig verteilte Belastung auf Biegung beansprucht wird, und zwar mit dem maximalen Biegungsmomente $\frac{Ql}{8}$ in der Mitte. Die grösste Zugspannung ist

$$\frac{H}{F} + \frac{eQl}{8J} = \frac{Ql}{2Fh}\left(1 + \frac{eFh}{4J}\right) \tag{305}$$

und muss gleich der zulässigen Beanspruchung s' gesetzt werden. Bei der Dimensionirung nimmt man am einfachsten eine gewisse Form und Grösse des Querschnittes an, berechnet die grösste Spannung und wiederholt das Verfahren bis diese Spannung mit der zulässigen Spannung nahezu übereinstimmt.

Armirter Balken.

2) Ein einfacher armirter Balken aus Föhrenholz, von 7 m Länge, soll die gleichförmig verteilte Belastung 4.5 t tragen. Die Dimensionen des Balkens und der Zugstangen sollen berechnet werden.

Der armirte Balken ist ein continuirlicher Balken auf drei Stützen; man könnte also der Mittelstütze eine zweckmässige Höhe in Übereinstimmung mit den Resultaten in § 13, 3 erteilen. In Wirklichkeit ist es aber schwierig oder unmöglich diesen Höhenunterschied beizubehalten; am besten betrachtet man deshalb den Balken als aus zwei Teilen bestehend, welche an den Enden frei aufliegen. Die totale Belastung Q veranlasst eine Belastung $\frac{1}{2} Q$ an der Mittelstütze und $\frac{1}{4} Q$ an den beiden Endstützen. Die Kraft ($\frac{1}{2} Q$) wird in zwei Componenten von der Grösse

$$P = \frac{Q}{4 \sin \alpha} \tag{306}$$

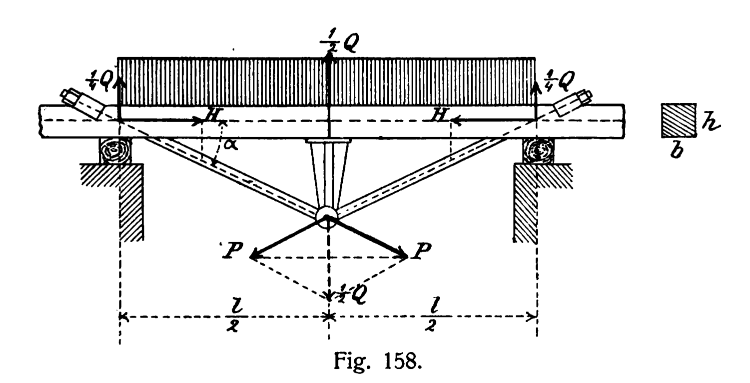


Fig. 158.

zerlegt, welche in den Zugstangen wirken. Die Reaction $\frac{1}{4}Q$ an einer der Stützen hat als Componenten eine Kraft längs der Zugstange, welche der Kraft P das Gleichgewicht hält, und eine horizontale Kraft

$$H = \frac{Q}{4 \operatorname{tg} \alpha}, \tag{307}$$

welche den Balken auf Druck beansprucht.

Die grössten Spannungen sind die Druckspannungen auf der oberen Seite, in dem Abstande $\frac{1}{4}l$ von den Stützen. Setzt man sie gleich s'', so findet man die Gleichung

$$s'' = \frac{H}{bh} + \frac{\frac{1}{32}Ql}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{Q}{4bh}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{3l}{4h}\right). \tag{308}$$

Auf der unteren Seite ist die Spannung

$$-\frac{H}{bh} + \frac{\frac{1}{32}Ql}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{Q}{4bh}\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{3l}{4h}\right); \tag{309}$$

sie ist fast ohne Ausnahme eine Zugspannung; da aber bei Holz $s'' < s'$ ist, so muss die Dimensionirung auf Grund der Gleichung (308) erfolgen. Mit den numerischen Werten

$$\alpha = 25^\circ,\ l = 700 \text{ cm},\ Q = 4.5 \text{ t},$$

$$s'' = 45 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},\ \left(s' = 100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$$

findet man z. B., wenn man $h = 30$ cm wählt, als Breite des Querschnittes $b = 16.4$ cm. In den Zugstangen wirkt die Kraft $P = 2.66$ t. Macht man sie aus Schmiedeisen, so ergiebt sich mit der zulässigen Spannung $760 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ der Durchmesser $d = 2.1$ cm.

Brückenpfeiler.

3) Ein steinerner Brückenpfeiler ist 10 m hoch, hat eine rechteckige Grundfläche mit 3 und 6 m langen Kanten und wiegt 350 t. Auf den Pfeiler wirkt oben der verticale Druck 150 t und eine horizontale Kraft 2 t. Ausserdem wirkt auf den Pfeiler ein seitlicher Winddruck mit der Resultirenden 4 t in 4 m Höhe und ein von der auf dem Pfeiler ruhenden Construction herrührender Winddruck von 30 t in 15 m Höhe von der Grundfläche. Die Spannungen in der Grundfläche sollen berechnet werden (Fig. 159).

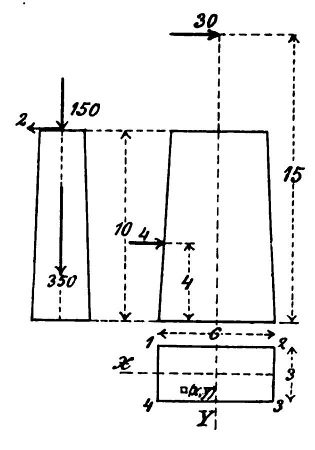


Fig. 159.

In einem Punkte mit den Coordinaten x, y ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (292) die Spannung

$$\sigma = -\frac{350+150}{6.3} + \frac{(4.4+30.15)\,12}{6^3.3}x + \frac{2.10.12}{3^3.6}y =$$

$$= -27.78 + 8.63\,x + 1.48\,y\,\frac{\text{ton}}{\text{m}^2}.$$

In den vier Ecken ist die Spannung

$$\sigma = -27.78 \pm 25.89 \pm 2.22,$$

d. h.

$$\text{in der Ecke } 1: \; -27.78 + 25.89 - 2.22 = -\;\;4.11\,\frac{\text{ton}}{\text{m}^2} = -0.41\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$\text{in der Ecke } 2: \; -27.78 - 25.89 - 2.22 = -55.89\,\frac{\text{ton}}{\text{m}^2} = -5.59\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$\text{in der Ecke } 3: \; -27.78 - 25.89 + 2.22 = -51.45\,\frac{\text{ton}}{\text{m}^2} = -5.15\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

$$\text{in der Ecke } 4: \; -27.78 + 25.89 + 2.22 = +\;\;0.33\,\frac{\text{ton}}{\text{m}^2} = +0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Diejenige verticale Kraft $P = -500$ t, welche allein für sich diese Spannungen erzeugen würde, müsste einen Angriffspunkt mit den Coordinaten $\xi = -0.932$ m, $\eta = -0.04$ m besitzen. Die neutrale Axe hat die Gleichung

$$8.63\,x + 1.48\,y = 27.78$$

und schneidet von dem Querschnitt ein kleines Dreieck an der Ecke 4 aus. Eigentlich sollten nur Druckspannungen in der Grundfläche

zugelassen werden; d. h. die neutrale Axe dürfte den Querschnitt nicht schneiden.

Widerlager eines Tonnengewölbes.

4) Die Widerlager eines Tonnengewölbes mit mehreren Abteilungen sind aus gewalzten schmiedeisernen Balken mit I Querschnitt gebildet. Während des Baues ist eine Abteilung frei (Fig. 160). Die resultirende Kraft R, durch welche einer der I Balken angestrengt wird, geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts und bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 35°. Das Gewicht der einen Gewölbehälfte nebst der zufälligen Last beträgt $500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. Welches Profil muss man wählen, wenn die zulässige Beanspruchung $1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ nicht überschreiten darf?

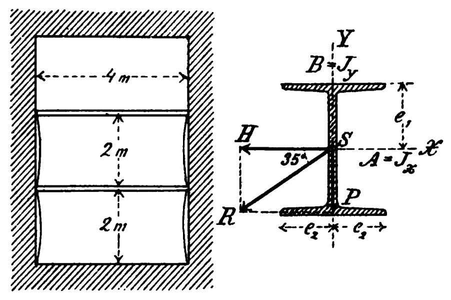


Fig. 160.

Die auf den Balken wirkende Horizontalkraft ist pro laufenden Meter

$$H = \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{500}{\operatorname{tg} 35^\circ} = 714.1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

und die verticale Belastung

$$P = 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (292) erhält man, wenn man σ durch die zulässige Spannung ersetzt,

$$1000 = \frac{e_1 \cdot \frac{1}{8} \frac{500}{100} 400^2}{J_x} + \frac{e_2 \cdot \frac{1}{8} \frac{714.1}{100} 400^2}{J_y}$$

oder

$$1 = 100 \frac{e_1}{J_x} + 143 \frac{e_2}{J_y}. \tag{310}$$

Diese Gleichung wird näherungsweise für das Normalprofil in der Figur 161 erfüllt. Es hat die Widerstandsmomente

$$\frac{J_x}{e_1} = 1274 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{J_y}{e_2} = 153 \text{ cm}^3$$

und der Balken wiegt 83.9 kg pro laufenden Meter.

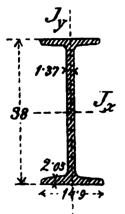


Fig. 161.

§ 24.

Biegung und Drehung.

Spannungen. In einem Querschnitte (Fig. 162), dessen Abstand von einem bestimmten Querschnitte x beträgt, entstehen in einem Punkte (y, z) eine Biegungsspannung σ und eine Torsionsspannung τ. Es werde angenommen, dass die Biegungsspannung von einem Biegungsmomente M_b in einer zum Querschnitte senkrechten Symmetrieebene des Balkens, der xz-Ebene herrühre; sie hat also die Grösse

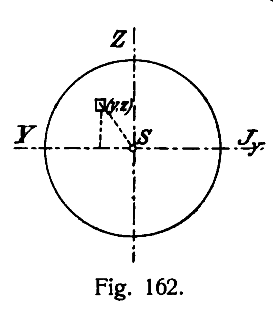


Fig. 162.

$$\sigma = \frac{z}{J} M_b, \tag{311}$$

wo J_y das Trägheitsmoment in Bezug auf die y-Axe ist. Die Schubspannung τ rühre von einem drehenden Momente M_t her; sie wird nach § 20 oder 21 berechnet. Durch diese Spannungen ist das Spannungsellipsoid in dem betrachteten Punkte bestimmt und die Hauptspannungen können berechnet werden. Zu diesem Zwecke setzt man in der allgemeinen Gleichung (12) in § 2 die Werte

$$\sigma_x = \sigma; \;\; \sigma_y = \sigma_z = 0; \;\; \tau_x = 0, \;\; \tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$$

ein, und erhält nach ausgeführter Auflösung für die Hauptspannungen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}\sigma^2 + \tau^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\sigma^2 + \tau^2}, \\ \sigma_3 &= 0. \end{aligned} \tag{312}$$

In den Richtungen von σ_1, σ_2 und σ_3, welche mit Hülfe des Gleichungssystems (11) bestimmt werden könnten, giebt es drei Hauptdehnungen, die auf Grund der Gleichungen (25) in § 4 berechnet werden. Man findet dabei

$$
\begin{aligned}
E\varepsilon_1 &= \sigma_1 - \frac{1}{m}\sigma_2 = \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{m}\sqrt{\frac{1}{4}\sigma + \tau^2}, \\
E\varepsilon_2 &= \sigma_2 - \frac{1}{m}\sigma_1 = \frac{m-1}{2m}\sigma - \frac{m+1}{m}\sqrt{\frac{1}{4}\sigma + \tau^2}, \\
E\varepsilon_3 &= -\frac{1}{m}(\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{1}{m}\sigma.
\end{aligned} \tag{313}
$$

Je nach dem Vorzeichen von σ ist entweder ε_1 oder ε_2 die numerisch grösste der drei Hauptdehnungen. Man kann annehmen, dass σ grösser als Null gewählt worden ist, und erhält dann eine grösste Beanspruchung in einem auf der Richtung von ε_1 senkrechten Flächenelemente; diese Beanspruchung ist äquivalent einer allein wirkenden normalen Spannung $E\varepsilon_1$. Bei der Dimensionirung sucht man folglich das Maximum der Grösse

$$
E\varepsilon_1 = \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{m}\sqrt{\frac{1}{4}\sigma^2 + \tau^2} \tag{314}
$$

auf und setzt es gleich der zulässigen Spannung. Das Maximum kommt meistens in einem Punkte des Umfanges des Balkens vor, da ja σ und τ beide auf dem Umfang ihr Maximum haben.

Mit $m = \frac{10}{3}$ (siehe p. 35) erhält man

$$
E\varepsilon_1 = 0.35\,\sigma + 0.65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \tag{315}
$$

am häufigsten benützt man aber die dem Werte $m = 4$ entsprechende Formel

$$
E\varepsilon_1 = \tfrac{3}{8}\sigma + \tfrac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \tag{316}
$$

Kreis und Kreisring.

Wenn der Querschnitt ein Kreis oder ein Kreisring ist, so hat man für einen Punkt des Umfanges

$$\sigma = \frac{eM_b}{J}; \; \tau = \frac{eM_t}{J_0} = \frac{eM_t}{2J}$$

und

$$(317) \qquad E\varepsilon_1 = \frac{e}{J}\left(\tfrac{3}{8}M_b + \tfrac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_t^2}\right).$$

Ideelles Biegungsmoment.

Die gleiche grösste Beanspruchung würde das Biegungsmoment

$$(318) \qquad M_i = \tfrac{3}{8}M_b + \tfrac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_t^2}$$

verursachen. M_i heisst ideelles Biegungsmoment.

Dimensionirung.

Bezeichnet man die zulässige Normalspannung wie gewöhnlich mit s und setzt in (317) den Wert von J ein, so ergiebt sich zur Dimensionirung eines Kreisquerschnittes

$$(319) \; \frac{J}{e} = \tfrac{1}{32}\pi d^3 = \frac{\max|M_i|}{s} = \frac{\max\left|\tfrac{3}{8}M_b + \tfrac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_t^2}\right|}{s};$$

für den kreisringförmigen Querschnitt ist

$$(320) \; \frac{J}{e} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\max|M_i|}{s} = \frac{\max\left|\tfrac{3}{8}M_b + \tfrac{5}{8}\sqrt{M_b^2 + M_t^2}\right|}{s}.$$

Anwendungen.

1) Eine Scheibe von 120 kg Gewicht und 45 cm Radius ist an einer schmiedeiserner Welle befestigt, wie die Figur 163 zeigt. Um die Scheibe ist ein Riemen gelegt, in dessen Teilen Spannungen von 300 und 150 kg wirken. Man bestimme den Durchmesser der Welle.

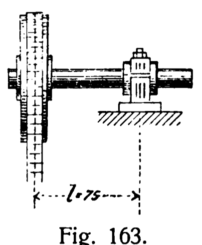


Fig. 163.

Auf die Welle wirkt das Drehungsmoment

$$M_t = 150 \,.\, 45 = 6750 \text{ kg cm}$$

und das Biegungsmoment

$$M_b = (300 + 150 + 120)\, 75 = 42750 \text{ kg cm}.$$

Daraus entsteht das ideelle Biegungsmoment

$$M_i = \tfrac{3}{8}\,42750 + \tfrac{5}{8}\sqrt{42750^2 + 6750^2} = 43080 \text{ kg cm}.$$

Mit $s = 500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ liefert die Gleichung (319)

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \,.\, 43080}{\pi \,.\, 500}} = 9{.}6 \text{ cm}.$$

Obgleich die gegebenen Kräfte nicht gross sind, würde die Welle doch ziemlich grosse Dimensionen erhalten; wenn man es vermeiden kann, so wählt man deshalb l kleiner als oben.

2) An einem Wasserrade (Fig. 164) ist der Effect 12 P. S. bei 15 Umdrehungen in der Minute. Das ganze Gewicht 5000 kg des Rades verteilt sich gleich auf zwei Systeme von Armen. Ausserhalb des Lagers *B* befindet sich ein Zahnrad von 800 kg Gewicht. Man bestimme die Dimensionen der hohlen gusseisernen Welle, wenn der innere Durchmesser überall $\frac{7}{10}$ des äusseren Durchmessers ist.

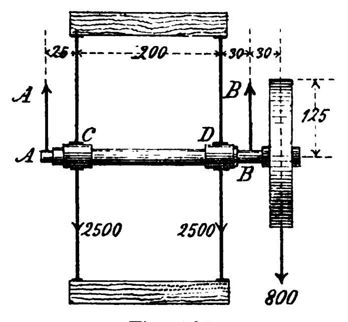


Fig. 164.

Das totale Drehungsmoment ist nach der Gleichung (244)

$$M_t = \frac{30 \,.\, 75\, N}{\pi n} = \frac{30 \,.\, 75 \,.\, 12}{\pi \,.\, 15} = 573 \text{ kg m} =$$

$$= 57300 \text{ kg cm}.$$

Hieraus ergiebt sich der Zahndruck

$$\frac{57300}{125} \backsim 460 \text{ kg}.$$

Setzt man voraus, dass dieser Druck in derselben Richtung wie das Gewicht wirkt, so ist die Belastung der Welle am Zahnrade

$$800 + 460 = 1260 \text{ kg}.$$

Die Reactionen in den Lagern *A* und *B* lassen sich jetzt mit Hülfe einer Projectionsgleichung und einer Momentengleichung berechnen. Man findet

$$A = \frac{2500\,(230 + 30) - 1260 \,.\, 30}{255} \backsim 2400 \text{ kg},$$

$$B = 5000 + 1260 - 2400 = 3860 \text{ kg}.$$

Ausser dem Zapfen A, muss man die Wellendurchmesser bei C, D und B berechnen.

Bei C wirkt das Biegungsmoment

$$M_b = 2400 \,.\, 25 = 60000 \text{ kg cm}$$

und das halbe Drehungsmoment, d. h.

$$\tfrac{1}{2} M_t = 28650 \text{ kg cm.}$$

Daraus ergiebt sich das ideelle Biegungsmoment

$$M_i = \tfrac{3}{8}\, 60000 + \tfrac{5}{8} \sqrt{60000^2 + 28650^2} = 64050 \text{ kg cm.}$$

Mit Hülfe der Gleichung (320) erhält man ferner für $s = 200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

$$\frac{\pi \left\{D^4 - (0.7\, D)^4\right\}}{32 D} = \frac{64050}{200}$$

und berechnet den äusseren Durchmesser

$$D = \sqrt[3]{\frac{64050}{200 \,.\, 0.0746}} = 16.3 \text{ cm;}$$

der innere Durchmesser ist $d = 0.7\, D = 11.4$ cm.

Bei D wirkt das Biegungsmoment

$$M_b = 2400 \,.\, 225 - 2500 \,.\, 200 = 40000 \text{ kg cm}$$

und das ganze Drehungsmoment

$$M_t = 67300 \text{ kg cm.}$$

Man erhält daraus das ideelle Biegungsmoment

$$M_i = \tfrac{3}{8}\, 40000 + \tfrac{5}{8} \sqrt{40000^2 + 57300^2} = 58680 \text{ kg cm.}$$

Diesem entspricht der äussere Durchmesser

$$D = \sqrt[3]{\frac{58680}{200 \,.\, 0.0746}} = 15.8 \text{ cm}$$

und der innere Durchmesser

$$d = 0.7\, D = 11.1 \text{ cm.}$$

Schliesslich ergiebt sich bei der Lagerstelle B

$$M_b = 1260 \,.\, 30 = 37800 \text{ kg cm.}$$

$$M_t = 57300 \text{ kg cm.}$$

$$M_i = 57080 \text{ kg cm.}$$

$$D = 15.6 \text{ cm.}$$

$$d = 10.9 \text{ cm.}$$

§ 25.

Zerknickungsfestigkeit.

Druck- und Knickfestigkeit.

Ein vollkommen homogener Stab mit gerader, verticaler Axe, auf den eine genau centrische Belastung in der Richtung der Axe wirkt, müsste eigentlich nur auf Druck beansprucht werden und keine Gefahr laufen nach irgend einer Seite gebogen zu werden. In Wirklichkeit kann aber dieser Fall nicht realisirt werden; kein Körper ist vollkommen homogen und hat eine vollkommen gerade Axe; auch ist die Belastung nur ausnahmsweise genau centrisch. Daraus entsteht eine Gefahr einer seitlichen Ausbiegung des Stabes; sie tritt in der That ein, wenn die Belastung genügend gross ist und wenn die Länge des Stabes im Verhältnis zu den Querdimensionen nicht so klein ist, das die Gefahr eines Zerdrückens früher eintritt. Die zum Ausbiegen erforderliche Belastung heisst Zerknickungskraft oder Knickbelastung. Theoretische Formeln für die Zerknickungsfestigkeit, die man oft in der Praxis zu berücksichtigen hat, wurden zuerst von Euler aufgestellt; später ist das Problem in mannigfacher Weise von anderen Autoren, wie z. B. Schwarz, Rankine, Tetmajer behandelt worden, wobei auch Experimente zu Hülfe gezogen wurden. Im folgenden werden nur die Eulerschen Formeln abgeleitet; sie erfreuen sich noch einer sehr grossen Anwendung und stimmen innerhalb gewisser Grenzen gut mit den Beobachtungen überein. Wie bei den übrigen Arten von Festigkeit schliesst übrigens auch hier jede Berechnung ein in der Wahl des Sicherheitscoefficienten bestehendes empirisches Moment in sich ein.

Befestigungsart.

Die Festigkeit gegen Zerknicken ist wesentlich von der Art und Weise abhängig, in welcher die Stabenden befestigt sind. Die gewöhnlichsten Fälle sind die vier in der Figur 165 dargestellten; sie zeigen zugleich die For-

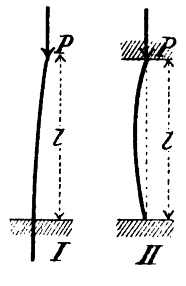


Fig. 165.

men, die die elastische Linie des Stabes annimmt, wenn eine Biegung stattfindet.

Im Falle I ist der Stab am unteren Ende eingespannt, während das obere Ende frei beweglich ist.

Im Falle II ist der Stab an seinen beiden in derselben Verticalen liegenden Enden frei drehbar.

Im Falle III ist der Stab am unteren Ende eingespannt, während das obere frei drehbare Ende gezwungen wird sich auf der Einspannungsverticalen zu halten.

Im Falle IV sind die beiden Stabenden in derselben Verticalen eingespannt.

Der Fall II, Fig. 165. Elastische Linie.

Der Fall II werde zuerst in Betracht gezogen (Fig. 166). Es handelt sich in erster Linie um die Berechnung der Knickbelastung. In einem Querschnitt im Abstande x vom unteren Ende sei y die Durchbiegung der in die elastische Linie übergegangenen Stabaxe. Das Biegungsmoment für diesen Schnitt ist somit gleich Py; nach der Formel (120) hat die elastische Linie die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{JE}y. \tag{321}$$

Fig. 166.

Darin bezeichnet J das Trägheitsmoment des Querschnittes des prismatisch vorausgesetzten Stabes in Bezug auf eine zur Ebene der Biegung senkrechte Axe. Der Kürze wegen benütze man die Bezeichnung

$$k^2 = \frac{P}{JE} \tag{322}$$

und erhält dann

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y. \tag{323}$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist bekanntlich

(324) $$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Da die elastische Linie durch den gewählten Anfangspunkt geht, so müssen $x = 0$ und $y = 0$ einander entsprechen; man erhält daraus $C_2 = 0$ und

$$y = C_1 \sin kx.$$

Hierin bezeichnet C_2 den grössten Wert, den y annehmen kann, d. h. die grösste Durchbiegung f; es ist also

(325) $$y = f \sin kx.$$

Um k und damit P zu berechnen, drückt man die Bedingung aus, dass der obere Endpunkt des Stabes sich auf der x-Axe befinden muss; die Werte $x = l - \varepsilon$ und $y = 0$ müssen einander entsprechen, wo ε eine kleine positive Grösse bezeichnet. Wählt man $\varepsilon = 0$, was um so genauer ist, je kleiner f ist, so ergiebt sich

$$f \sin kl = 0.$$

Also ist entweder $f = 0$, woraus allgemein $y = 0$ hervorgeht, d. h. der Stab wird gar nicht gebogen, oder

$$\sin kl = 0.$$

Hieraus folgt

$$k = 0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l} \dots \frac{n\pi}{l},$$

wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet.

Die elastische Linie hat also die Gleichung

(326) $$y = f \sin \frac{n\pi}{l} x$$

und ist eine Sinus- oder Wellenlinie. Damit sie entstehe, muss die Kraft P die Grösse

(327) $$P = k^2 JE = \frac{n^2\pi^2}{l^2} JE$$

besitzen.

Knickbelastung. Gemäss dieser Gleichung ist die Knickbelastung P unabhängig von der Grösse f der Durchbiegung; dieselbe Kraft, welche genügt um den Stab überhaupt zu biegen, würde also auch das Zerknicken veranlassen. Dies stimmt jedoch nicht völlig mit der Wirklichkeit überein, sondern man muss die Belastung etwas, wenn auch sehr wenig vergrössern, damit f wachse. Übrigens kann die Eulersche Theorie ohne Schwierigkeit so vervollständigt werden, dass die Abhängigkeit zwischen Durchbiegung und Belastung berücksichtigt ist.[1]

Wenn der Stab sich frei nach allen Seiten biegen kann, so geschieht die Biegung in Wirklichkeit in einer Ebene, welche senkrecht auf den Querschnittsaxen steht, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment J ein Minimum ist. In der Formel (327) für die Knickbelastung muss deshalb unter J das kleinste centrale Trägheitsmoment des Querschnittes verstanden werden. Wäre der Querschnitt ein Kreis, ein Kreisring, ein Quadrat u. s. w., so hätte man dasselbe Trägheitsmoment in Bezug auf alle Schwerpunktaxen und es würde keine ausgezeichnete Biegungsebene geben. Um P möglichst gross zu machen, muss man dem Querschnitte eine solche Form geben, dass J möglichst gross wird.

Verschiedene Werte von n. Für verschiedene ganzzahlige Werte von n in den Formeln

$$y = f \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{und} \quad P = \frac{n^2\pi^2}{l^2} JE$$

erhält man verschiedene Curven und verschiedene Werte der zerknickenden Kraft. Der kleinste Wert von n ist 1 und liefert

$$y = f \sin \frac{\pi}{l} x; \quad P = \frac{\pi^2}{l^2} JE. \tag{328}$$

Da $\sin \frac{\pi}{l} x$ für keinen Wert innerhalb des Intervalles

$$0 < x < l$$

[1] Siehe hierüber Grashof; Theorie der Elasticität und Festigkeit.

verschwindet, wohl aber für $x=0$ und $x=l$, so schneidet die elastische Linie die x-Axe zwischen den Endpunkten nicht, sondern bildet einen einzigen Bogen (Fig. 165, II).

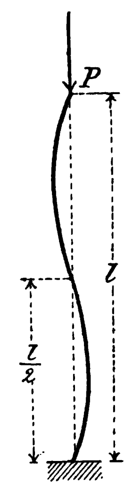


Fig. 167.

Mit $n=2$ erhält man

$$(329) \qquad y=f\sin\frac{2\pi}{l}x;\; P=\frac{4\pi^2}{l^2}JE.$$

Innerhalb des Intervalles $0<x<l$ wird jetzt $y=0$ für $x=\frac{l}{2}$ und die elastische Linie besteht aus zwei Bogen auf verschiedenen Seiten der Verticalen (Fig. 167). Die Knickbelastung, welche dazu erforderlich, ist vier Mal so gross als in dem Falle $n=1$. In Wirklichkeit kommt aber eine elastische Linie von der Form in Figur 167 bei einem freien Stabe nicht vor, sondern ergiebt sich nur, wenn der Stab in der Mitte, wo der Wendepunkt liegt, mit einer F ü h r u n g versehen ist.

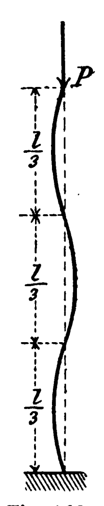


Fig. 168.

Für $n=3$ würde die elastische Linie die in der Figur 168 dargestellte Form besitzen; sie bildet drei Bogen. Die Gleichung der Linie ist

$$y=f\sin\frac{3\pi}{l}x;$$

und die erforderliche Belastung beträgt

$$(330) \qquad P=\frac{9\pi^2}{l^2}JE,$$

d. h. ist neun Mal so gross wie für $n=1$. Um diese Form wirklich zu Stande zu bringen, müsste der Stab mit z w e i F ü h r u n g e n versehen werden.

Wie schon erwähnt, würde eine kleinere Kraft als

(331) $$P = \frac{\pi^2}{l^2} JE$$

keine Biegung des Stabes verursachen.

Der Fall I, Fig. 165.

Der Fall I (p. 236), in welchem der Stab am unteren Ende eingespannt, am oberen Ende frei beweglich ist, kann auf den vorhin behandelten Fall II zurückgeführt werden. Aus der Figur 169 ist ersichtlich, dass ein in dieser Weise befestigter Stab als die Hälfte eines an den beiden Enden frei drehbaren Stabes betrachtet werden kann. Die Knickbelastung ist deshalb die gleiche für beide Stäbe; man erhält sie, indem man l in der Gleichung (331) durch $2l$ ersetzt.

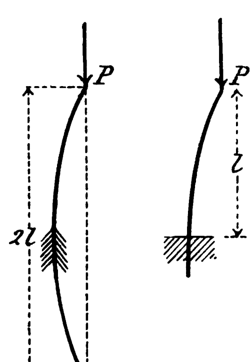


Fig. 169.

(332) $$P = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{l^2} JE,$$

d. h. ***für dieselbe Stablänge ist die zerknickende Kraft in dem Falle I vier Mal kleiner wie im Falle II.***

Der Fall IV, Fig. 165.

Auf den Fall II kann auch der Fall IV zurückgeführt werden, in dem der Stab an beiden Enden eingespannt ist. Man betrachtet eine der Annahme $n = 3$ im Falle II entsprechende elastische Linie und greift ein Stück heraus, das zwei Drittel von der ganzen Länge ausmacht. (Fig. 170). Ersetzt man in der Gleichung (330) l durch $\frac{2}{3} l$, so erhält man die entsprechende Knickbelastung

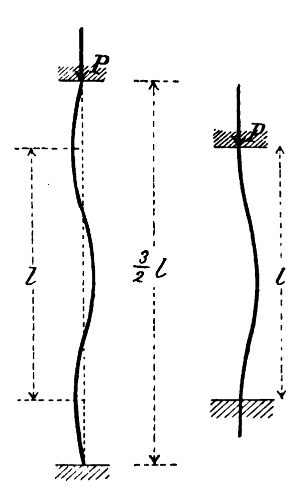


Fig. 170.

$$P = 9 \frac{\pi^2}{(\frac{2}{3} l)^2} JE$$

oder

(333) $$P = 4\frac{\pi^2}{l^2}JE,$$

d. h. *die Knickbelastung ist in diesem Falle vier Mal so gross wie im Falle II, wenn die Stablänge dieselbe ist.*

Der Fall III, Fig. 163.

Dagegen kann der noch übrige Fall III nicht auf die früheren zurückgeführt werden, sondern macht eine besondere Untersuchung erforderlich.

Die Führung des oberen Stabendes kann durch eine horizontale Kraft R ersetzt werden (Fig. 171). In dem Querschnitte x wirkt dabei das Biegungsmoment

$$M_x = Py - R(l - x)$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{Py - R(l - x)}{JE}.$$

Für kleine Werte von x muss $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv sein; das Biegungsmoment ist nahezu gleich $-Rl$; also muss man das Zeichen $-$ wählen und findet

(334) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R(l - x) - Py}{JE}.$$

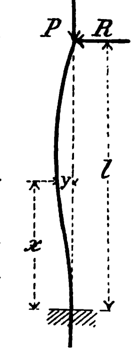


Fig. 171.

Der Kürze wegen setze man

(335) $$\frac{P}{JE} = k^2, \quad \frac{R}{JE} = r^2;$$

dabei geht die Gleichung (334) in

(336) $$\frac{d^2y}{dx^2} = r^2(l - x) - k^2y$$

über.

Um diese Differentialgleichung zu integriren, bezeichne man mit y_0 ein particuläres Integral derselben und setze

$$y = y_0 + z,$$

wo z eine neue Veränderliche ist. Man erhält dann

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} = r^2(l - x) - k^2(y_0 + z),$$

und da

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = r^2(l - x) - k^2y_0$$

ist, die Differentialgleichung für z

(337) $$\frac{d^2z}{dx^2} = -k^2z.$$

Ein particuläres Integral y_0 der Gleichung (336) ergiebt sich hier unmittelbar als eine ganze Function ersten Grades von x. Die zweite Ableitung einer solchen Function verschwindet und die Gleichung wird also durch

$$y_0 = \frac{r^2}{k^2}(l - x)$$

befriedigt.

Die Differentialgleichung (337) hat das allgemeine Integral

$$z = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx,$$

folglich die Differentialgleichung (336) das allgemeine Integral

(338) $$y = \frac{r^2}{k^2}(l - x) + C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten und der Grösse k hat man die drei Bedingungen

(339) $$x = 0,\ y = 0. \qquad x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0. \qquad x = l,\ y = 0.$$

Durch Differentiation der Gleichung (338) erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r^2}{k^2} + C_1k \cos kx - C_2k \sin kx.$$

Die beiden ersten Bedingungen (339) liefern jetzt

$$\frac{r^2}{k^2} l + C_2 = 0,$$

$$-\frac{r^2}{k^2} + C_1 k = 0,$$

also

$$C_1 = \frac{r^2}{k^3}; \quad C_2 = -\frac{r^2 l}{k^2}.$$

Mit Hülfe der dritten Bedingung findet man

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0$$

und nach Einsetzen der Werte von C_1 und C_2

$$\text{(340)} \qquad \operatorname{tg} kl = -\frac{C_2}{C_1} = kl,$$

somit eine transcendente Gleichung für k. Der Kürze wegen werde

$$\text{(341)} \qquad u = kl = \sqrt{\frac{P}{JE}}\, l$$

gesetzt. Die Gleichung (340) geht dann in

$$\text{(342)} \qquad \operatorname{tg} u = u$$

über. Sie hat eine Wurzel $u = 0$, welche jedoch keine Lösung der Aufgabe liefert. Um die übrigen Wurzeln zu erhalten, sind in der Figur 172 die Curven für die Function

$$v = \operatorname{tg} u$$

und die Gerade

$$v = u$$

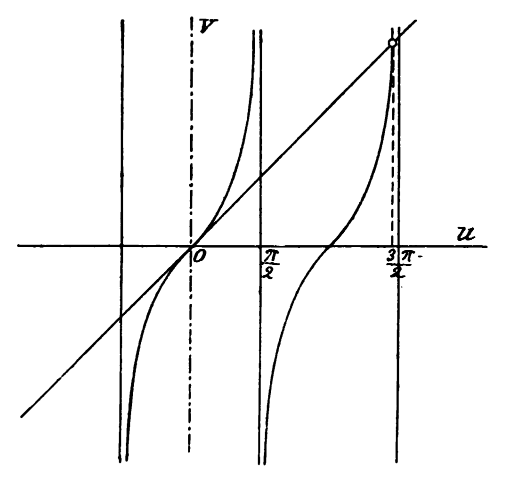


Fig. 172.

gezeichnet. Jedem Schnittpunkte dieser Linien entspricht eine Wurzel. Von diesen kommt hier nur die kleinste positive Wurzel in Betracht. Löst man die Gleichung (342) auf, so findet man für diese Wurzel den Wert

$$u = 4.4934 \text{ abs. Winkeleinh.} = 257^\circ\, 27'\, 12''.$$

Ferner hat man

$$u^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{JE} l^2 = 20.19$$

und die Knickbelastung ist

$$P = 20.19 \frac{JE}{l^2}.$$

Diesem Ausdrucke kann auch die Form

$$P = 2.046 \frac{\pi^2}{l^2} JE \tag{343}$$

gegeben werden. Der Einfachheit wegen wendet man gewöhnlich die angenäherte Gleichung

$$P = 2 \frac{\pi^2}{l^2} JE \tag{344}$$

an. *In dem jetzt betrachteten Falle ist also die Knickbelastung ungefähr doppelt so gross wie in dem Falle II.*

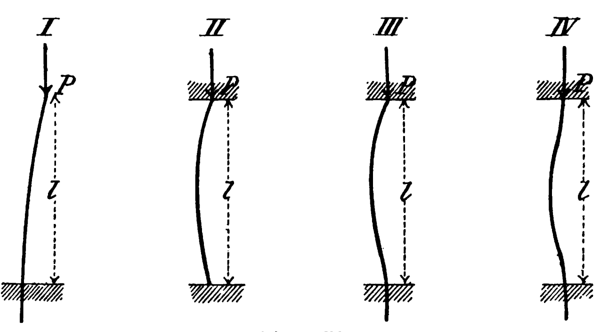


Fig. 173.

Zusammenstellung. Die erhaltenen Resultate sind für die verschiedenen Befestigungsarten unten zusammengestellt. Oft macht

man von einer Länge l_0, der sog. freien Knickungslänge Gebrauch; sie ist so gewählt, dass dieselbe Knickbelastung sich für einen um die Enden frei drehbaren Stab von der Länge l_0 ergeben würde.

$$P = \tfrac{1}{4}\frac{\pi^2}{l^2}JE; \quad P = \frac{\pi^2}{l^2}JE; \quad P = 2\frac{\pi^2}{l^2}JE; \quad P = 4\frac{\pi^2}{l^2}JE.$$

$$l_0 = 2l; \qquad l_0 = l; \qquad l_0 = 0.71\, l; \qquad l_0 = 0.5\, l.$$

Wenn die Befestigungsart nicht mit einem von diesen Fällen genau übereinstimmt, so wählt man schätzungsweise eine freie Knickungslänge und berechnet daraus die Knickbelastung.

In Bezug auf die obigen Formeln für die Knickfestigkeit muss noch bemerkt werden, dass sie sich auf Resultate gründen, welche unterhalb der Elasticitätsgrenze gültig sind, während diese Grenze in Wirklichkeit häufig überschritten ist, wenn eine Biegung des Stabes stattfindet.

Dimensionirung.

Um einen Stab oder einen Pfeiler zu dimensioniren, der auf Zerknickung beansprucht ist, sieht man zuerst nach, welche Befestigungsart vorhanden ist, wählt einen Sicherheitsgrad n und bestimmt eine Kraft P, n Mal so gross als die gegebene Belastung Q der Construction; diese Kraft $P = nQ$ wird gleich der Knickbelastung gemacht. Die erhaltene Gleichung liefert dann das kleinste erforderliche Trägheitsmoment des Querschnittes.

Ein Stab oder Pfeiler, welcher der Knickgefahr unterliegt, ist immer gleichzeitig in Gefahr durch den Druck zerquetscht zu werden. Ausser der Berechnung auf Knickung muss man deshalb immer eine Berechnung auf Druckfestigkeit ausführen; man wählt die grösseren der bei den beiden Berechnungen erhaltenen Dimensionen.

Grenze zwischen Druck- und Knickungsgefahr.

In vielen Fällen ist es interessant die Grenze zu ermitteln, bei welcher die Gefahr des Zerquetschens gleich gross mit der Gefahr des Zerknickens ist. Ein Beispiel werde hier angeführt.

Ein schmiedeiserner Stab mit kreisförmigem Querschnitt, der an beiden Enden frei drehbar ist, kann bei 5-facher Sicherheit gegen Zerknicken mit der Last

$$Q = \frac{1}{5}\pi^2 \frac{JE}{l^2} = \frac{\pi^2\, 2\,.\,10^6\,.\,\pi d^4}{5\,.\,64\, l^2}\,\text{kg}$$

belastet werden; bei derselben Sicherheit gegen Zerdrücken kann der Stab die Belastung

$$Q' = \frac{\pi d^2}{4}s = \frac{\pi\,.\,760}{4}d^2\,\text{kg}$$

tragen. Setzt man $Q = Q'$, so findet man

$$\frac{l^2}{d^2} = \frac{10^4\,.\,\pi^2}{4\,.\,76}$$

und

$$l = \sqrt{\frac{10^4\,.\,\pi^2}{4\,.\,76}}\,d \backsim 18\,d.$$

Wäre $l > 18\,d$, so müsste man auf Zerknicken, wäre $l < 18\,d$, so hätte man direct für Druck zu dimensioniren.

Anwendungen.

1) Eine cylindrische gusseiserne Säule von 4.5 m Länge und 25 cm äusserem Durchmesser soll eine Belastung von 50 t tragen. Welche Dicke muss die Säule bei 8-facher Sicherheit erhalten?

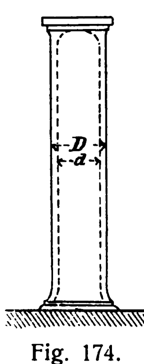


Fig. 174.

Berechnet man zuerst die Säule nach den Regeln der Druckfestigkeit, so erhält man, da für gutes feinkörniges Gusseisen die Bruchfestigkeit bis zu 8000 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gewählt werden kann,

$$\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{50000}{1000},$$

woraus mit

$$D = 25\ \text{cm}$$
$$d = 24.7\ \text{cm}$$

sich ergiebt. Die Wandstärke wäre also

$$\delta = \frac{D-d}{2} = 0.65\ \text{cm}.$$

Rechnet man dagegen auf Zerknickung, so erhält man mit

$$E = 1000000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

nach der Gleichung (331), welche hier am besten der Befestigungsart der Säule entspricht, wenn keine besonderen Versteifungen des Kopfes oder des Fusses angebracht sind,

$$J = \frac{l^2 n\, Q}{\pi^2 E} = \frac{450^2 . 8 . 50000}{\pi^2 . 1000000} = 8207.$$

Andererseits ist

$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(25^4 - d^4).$$

Man berechnet daraus

$$d = 21.7 \text{ cm}$$

und

$$\delta = 1.65 \text{ cm}.$$

Dieser Wert ist grösser als der frühere und wird also benützt. Die Wandstärke darf nirgends kleiner als 1.65 cm sein.

2) Welcher Belastung kann eine schmiedeiserne Säule aus Quadranteisen (Fig. 175) von der Länge 8 m, der Querschnittsfläche 188.8 cm² und dem Trägheitsmomente 15880 cm⁴ ausgesetzt werden?

Die Knickbelastung ist

$$P = \pi^2 \frac{15880 . 2 . 10^6}{800^2} = 489800 \text{ kg} =$$

$$= \text{ung. } 490 \text{ t.}$$

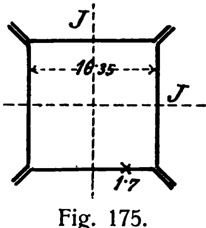


Fig. 175.

Mit 5-facher Sicherheit würde also die Belastung rund 100 t betragen.

Mit dem gleichen Sicherheitsgrade wäre die zulässige Druckbelastung

$$Q = 760 . 188.8 = 143500 \text{ kg} =$$

$$= 143.5 \text{ t},$$

also zu gross.

3) Man berechne den Durchmesser der Kolbenstange einer Dampfmaschine von 60 cm Cylinderdurchmesser und 5 Atm. Dampfüberdruck, wenn die Länge der Stange 1.5 m beträgt.

Die Kolbenstange ist ungefähr gemäss dem Falle III befestigt; sie wird abwechselnd auf Zug und Druck oder Zerknicken beansprucht. Bei Kolbenstangen wählt man einen hohen Sicherheitsgrad, etwa $n = 20$.

Der Gesammtdruck auf die Kolbenstange ist

$$Q = 5 \cdot \frac{\pi \cdot 60^2}{4} 1.033 \text{ kg}.$$

Bei der Berechnung auf Zug oder Druck ergiebt sich

$$\frac{\pi d^2}{4} \frac{3800}{20} = \frac{5\pi \cdot 60^2}{4} 1.033$$

und ausgeführt

$$d = 9.9 \text{ cm}.$$

Durch eine Berechnung auf Zerknickung findet man

$$2\pi^2 \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot \pi d^4}{64 \cdot 150^2} = 20\, Q$$

und

$$d = 7.6 \text{ cm}.$$

Bei der Ausführung wählt man etwa $d = 10$ cm.

§ 26.

Übungsaufgaben betreffend zusammengesetzte Festigkeit.

1) In welchem Masse wird die Inanspruchnahme eines Stabes mit kreisförmigen Querschnitt vergrössert, wenn die parallel der Axe wirkende Last von dem Mittelpunkte nach dem Umfang verschoben wird?

2) Ein 2 m langer hölzerner Balken ist gleichförmig belastet mit 10 t; er hängt an zwei verticalen Balken, wie die Figur 145 zeigt. Man berechne die Dimensionen des Balkens und der Hängebalken.

3) Man bestimme den Kern eines hohlen quadratischen Querschnittes.

4) Eine verticale frei stehende Mauer aus Ziegeln hat 4 m Höhe und 0.6 m Dicke und ist mit dem Fundamente fest verbunden. Auf die Mauer wirken das eigene Gewicht und ein zur vorderen Fläche senkrechter Winddruck, der 120 kg pro m² beträgt. Man berechne die Spannungen in der Grundfläche.

5) Um wie viel muss die Länge l der Welle in Figur 163 gekürzt werden, wenn der Wellendurchmesser nur 7 cm betragen darf?

6) Ein Stab von kreisförmigem Querschnitt wird auf Zug und Abscheren beansprucht. Man leite eine Formel für die Dimensionirung dadurch ab, dass man den Coefficienten ε_1 der grössten Dehnung berechnet.

7) Ein Stab ist am unteren Ende vertical eingespannt und am oberen Ende excentrisch belastet. Der Stab ist so lang, dass die Knickungsgefahr eintritt. Man bestimme die elastische Linie und leite eine Formel für die Dimensionirung ab. (Siehe G r a s h o f, p. 162.)

8) Eine Säule aus Eichenholz hat einen quadratischen Querschnitt von 20 cm Seitenlänge, ist 6 m lang und an den Enden versteift. Welche Belastung kann die Säule mit 10-facher Sicherheit tragen?

9) Welche Belastung kann die Säule im Beispiel 8) tragen, wenn sie nicht massiv ist, sondern aus vier Planken von 9 cm Dicke gebaut ist?

10) Man berechne die Länge, bei welcher eine hölzerne Säule mit rechteckigem Querschnitt ebenso gut auf Druck wie auf Zerknickung dimensionirt werden kann, und zwar für jede der vier Befestigungsarten in § 25.

Siebenter Abschnitt.

Die Deformationsarbeit.

§ 27.

Allgemeiner Ausdruck für die Deformationsarbeit.

Unter der Deformationsarbeit versteht man die Arbeit, welche erforderlich ist um einen Körper aus seinem gegebenen Anfangszustande in einen gewissen Deformationszustand zu versetzen. Wenn die Belastung nicht plötzlich oder stossweise angebracht wird, so ist diese Arbeit gleich der Summe aller Elementararbeiten, welche die auf jedes kleine Volumenelement des Körpers wirkenden Spannungen verrichten, wenn sie von Null an zu ihren schliesslichen Werten wachsen. Im folgenden wird hauptsächlich der Fall betrachtet, dass die Elasticitätsgrenze innerhalb des Körpers nirgends überschritten wird. Wenn der Körper allmählich in seinen ursprünglichen Zustand wiederkehrt, indem man die angebrachten äusseren Kräfte entfernt, so führen die Spannungen eine Arbeit aus, welche gleich gross mit der Deformationsarbeit ist, aber das entgegengesetzte Zeichen hat. Der Körper hat dabei zuerst Arbeit aufgenommen und sie dann wieder abgegeben.

Hier soll nicht der allgemeinste Ausdruck der Deformationsarbeit für einen beliebigen Körper aufgestellt werden, es sollen nur einige oft vorkommende specielle Fälle betrachtet werden.

An einem geraden Stabe, auf den eine axiale von Null an wachsende Kraft P wirkt, welche zunächst als eine

Zugkraft vorausgesetzt werde, entsteht in einem Querschnitte F_x die Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F_x}.$$

Ein Stück des Stabes von der Länge dx in unmittelbarer Nähe dieses Querschnittes hat das Volumen

$$dV = F_x\, dx$$

und verlängert sich um

$$\frac{\sigma\, dx}{E}.$$

Würde die Kraft P die ganze Zeit dieselbe Grösse beibehalten, so wäre ihre Arbeit

$$P \frac{\sigma\, dx}{E} = \frac{\sigma^2 F_x\, dx}{E} = \frac{1}{E} \sigma^2\, dV.$$

Die Kraft wächst aber allmählich von Null bis P. Es sei P' ein Wert der Kraft, wobei $P' < P$ ist. Die Spannung ist gleichzeitig

$$\sigma' = \frac{P'}{F_x}.$$

In einem sehr kurzen Zeitelemente entsteht eine gewisse Zunahme der Verlängerung

$$\delta \frac{\sigma'\, dx}{E};$$

die Kraft P' verrichtet dabei die Arbeit

$$P'\, \delta \frac{\sigma'\, dx}{E} = \frac{P'\, dx}{E}\, \delta\sigma' = \frac{F_x\, dx}{E}\, \sigma'\, \delta\sigma' = \frac{dV}{E}\, \sigma'\, \delta\sigma'.$$

Integrirt man diesen Ausdruck in Bezug auf σ', so ergiebt sich während der Zeit der totalen Verlängerung die Arbeit

$$dA = \frac{1}{2E} \sigma^2 \, dV;$$

sie ist nur halb so gross wie der oben angeführte Wert. Für den ganzen Körper findet man

$$A = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 \, dV, \tag{345}$$

wo das Integral über sämtliche Volumenelemente des Körpers erstreckt werden muss.

Bei der Ableitung der Gleichung (345) ist die Proportionalität zwischen Verlängerung und Kraft vorausgesetzt worden. Wie man ohne weiteres erkennt, kann dieselbe Gleichung auch auf einen Körper angewandt werden, der einen axialen Druck erfährt. Sie hat aber eine noch grössere Anwendbarkeit; sie gilt auch für stabförmige Körper, die gebogen werden, insofern die Schubspannungen in den Querschnitten vernachlässigt und nur die normalen Spannungen in Betracht gezogen werden. Dabei ist σ nicht constant in einem Querschnitte, sondern nach dem bekannten Gesetze veränderlich. Für den Beweis des Satzes braucht man sich nur ein Stück des Körpers zwischen zwei benachbarten Querschnitten in stabförmige, der Balkenaxe parallele Elemente zerlegt zu denken.

Für einen Körper, in dem nur Schubspannungen vorkommen, ergiebt sich in derselben Weise wie oben als Ausdruck für die Deformationsarbeit

$$A = \frac{1}{2G} \int \tau^2 \, dV. \tag{346}$$

Wenn normale Spannungen und Schubspannungen zugleich vorhanden sind, so kann oft die Gleichung

$$A = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dV \tag{347}$$

benützt werden.

Wenn die Grenze der Proportionalität zwischen Belastung und Verlängerung eines auf Zug beanspruchten Stabes überschritten wird, so kann die Deformationsarbeit nicht mehr nach der Gleichung (345) berechnet werden. Wäre die Beziehung zwischen Belastung und Verlängerung durch eine Gleichung gegeben, so könnte die Arbeit auch in diesem Falle analytisch bestimmt werden; im allgemeinen lassen sich aber solche Gleichungen nicht aufstellen. Dagegen erhält man auch jetzt die Deformationsarbeit aus einem Diagramme (Fig. 176), in welchem die Verlängerungen des Stabes die Abscissen und die belastenden Kräfte die Ordinaten sind (Fig. 176).

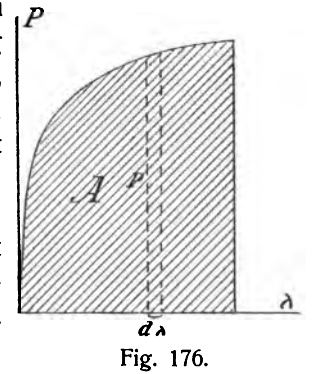


Fig. 176.

Die meisten Materialprüfungsmaschinen sind so eingerichtet, das solche Diagramme während der Probe gezeichnet werden können. Die Deformationsarbeit ist gleich dem Flächeninhalte, welcher zwischen der Diagrammcurve, der Axe der Abscissen und einer letzten Ordinate liegt. Man hat also

$$A = \int P d\lambda \,. \tag{348}$$

Wenn die letzte Ordinate diejenige ist, welche dem Bruche des Stabes entspricht, so liefert das Diagramm die Arbeit, welche bis zum Bruch des Stabes aufzuwenden ist. Die Arbeit, welche bei der Inanspruchnahme bis zum Bruch auf die Volumeneinheit des Stabes sich bezieht, kann als ein Qualitätscoefficient des Materiales gewählt werden.

In den bis jetzt betrachteten Fällen ist die Formänderung eine statische gewesen, indem den Angriffspunkten der Kräfte die Geschwindigkeit Null zugeschrieben wurde. Wenn eine Kraft plötzlich zu wirken anfängt,

so ist die Formänderung eine dynamische. Um sie zu berechnen, drückt man die Bedingung aus, dass die Arbeit, welche die äusseren Kräfte bis zu der Zeit ausgeführt haben, nach welcher der Körper in den schliesslichen Gleichgewichtszustand gelangt ist, gleich gross mit der Deformationsarbeit ist, wobei für diese die Ausdrücke (345), (346) und (347) auch jetzt gelten.

Anwendungen.

Zug und Druck.

Die oben aufgestellte Gleichung (345) werde jetzt auf einige specielle Fälle angewandt.

Unveränderlicher Querschnitt.

Wenn der Querschnitt des Stabes unveränderlich ist, so ist auch σ constant, wenigstens wenn das eigene Gewicht unberücksichtigt bleibt; es ergiebt sich dann die Deformationsarbeit

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} V, \tag{349}$$

d. h. sie ist proportional dem Volumen des Stabes und dem Quadrate der specifischen Spannung.

Veränderlicher Querschnitt.

Ist der Querschnitt veränderlich und bezeichnet man mit σ_0 die Spannung an dem kleineren Endquerschnitte F_0, so findet man

$$\sigma = \frac{F_0}{F_x} \sigma_0, \quad dV = F_x \, dx$$

und

$$A = \frac{\sigma_0^2 F_0^2}{2E} \int \frac{dx}{F_x}, \tag{350}$$

wo das Integral über die ganze Länge des Stabes erstreckt werden muss.

Speciell ergiebt sich für die Pyramidenform des Stabes (Fig. 177)

$$F_x = \frac{(h+x)^2}{h^2} F_0,$$

$$\int_0^l \frac{dx}{F_x} = \frac{h^2}{F_0} \int_0^l \frac{dx}{(h+x)^2} = \frac{hl}{F_0(h+l)} = \frac{l}{\sqrt{F_0 F_1}},$$

wo

$$F_1 = \frac{(h+l)^2}{h^2} F_0$$

der andere Endquerschnitt ist. Die Deformationsarbeit beträgt

$$(351) \qquad A = \frac{\sigma_0^2}{2E} F_0 l \sqrt{\frac{F_0}{F_1}}.$$

Dynamische Wirkung der Kraft.

Wenn ein gerader prismatischer Stab plötzlich dem Einfluss einer axialen Kraft P unterworfen wird, so entsteht eine Verlängerung λ, welche einem obigen Satze gemäss aus der Gleichung

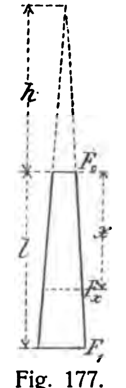


Fig. 177.

$$(352) \qquad P\lambda = \tfrac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V$$

erhalten wird. Bezeichnet man mit P' die statische Belastung, welche die Spannung σ verursacht, mit λ' die durch sie erzeugte Verlängerung, so hat man

$$\frac{\sigma^2}{E} V = \frac{P'P'}{EF^2} Fl = P' \frac{P'l}{EF} = P'\lambda'$$

und

$$P\lambda = \tfrac{1}{2} P'\lambda'.$$

Für $\lambda = \lambda'$ wird $P' = 2P$, d. h. *bei gleich grosser Verlängerung und Spannung muss die statische Belastung zwei Mal so gross wie die dynamische sein.*

Wenn die Arbeit der äusseren Kraft dadurch entsteht, dass das Gewicht Q aus der Höhe H herunterfällt und dabei seine kinetische Energie abliefert, so findet man mit Vernachlässigung des Gewichtes des Stabes

$$Q(H+\lambda)=\tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V=FE\frac{\lambda^2}{2l},$$

da

$$\sigma=E\frac{\lambda}{l}$$

ist. Durch Auflösung in Bezug auf λ folgt

$$\lambda=\frac{Ql}{FE}+\sqrt{\left(\frac{Ql}{FE}\right)^2+\frac{2Ql}{FE}H}. \tag{353}$$

Wenn H gross im Verhältnis zu λ ist, so hat man annähernd

$$QH=\tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V$$

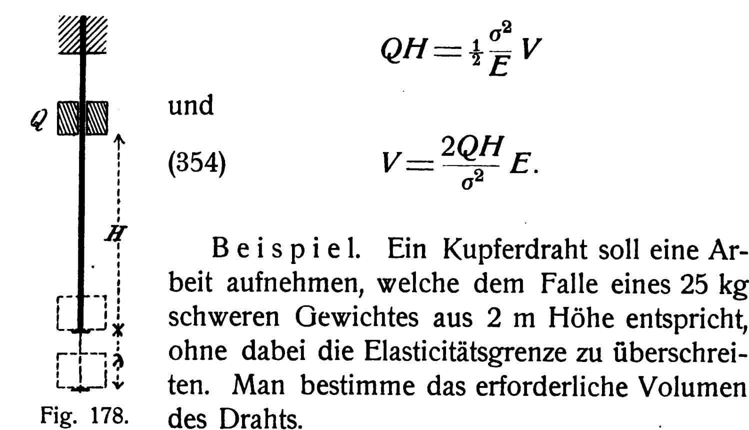


Fig. 178.

und

$$V=\frac{2QH}{\sigma^2}E. \tag{354}$$

B e i s p i e l. Ein Kupferdraht soll eine Arbeit aufnehmen, welche dem Falle eines 25 kg schweren Gewichtes aus 2 m Höhe entspricht, ohne dabei die Elasticitätsgrenze zu überschreiten. Man bestimme das erforderliche Volumen des Drahts.

Mit $\sigma=1200\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $E=1300000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ erhält man

$$V=\frac{2\,.\,25\,.\,200}{1200^2}\,1300000=9028\ \text{cm}^3.$$

Bei einem auf Biegung beanspruchten Balken ist (p. 252) die Deformationsarbeit mit Vernachlässigung der Schubspannungen bei statischer Anstrengung *Biegung.*

$$A = \frac{1}{2E} \int \sigma^2 \, dV. \tag{355}$$

Mit den im Abschnitt IV getroffenen Voraussetzungen ist

$$\sigma = \frac{y}{J} M_x;$$

daraus ergiebt sich mit

$$dV = dF \, . \, dx$$

$$A = \frac{1}{2E} \int \frac{M_x^2}{J^2} dx \int y^2 \, dF = \frac{1}{2E} \int \frac{M_x^2}{J} dx, \tag{356}$$

wo das Integral über die ganze Länge des Balkens erstreckt werden muss. Wenn der Querschnitt constant ist, so ergiebt sich speciell

$$A = \frac{1}{2JE} \int M_x^2 \, dx. \tag{357}$$

Beispielsweise erhält man bei einem runden Stabe, der an einem Ende eingespannt und am anderen Ende durch die Kraft P belastet ist, *Runder Stab.*

$$A = \frac{1}{2JE} \int_0^l (Px)^2 \, dx = \frac{P^2 l^3}{6JE} = \frac{32}{3\pi} \frac{P^2 l^3}{Ed^4}.$$

Bezeichnet man die grösste Faserspannung mit σ, so kann man diesem Ausdrucke die Form geben

$$A = \frac{1}{24} \frac{\sigma^2}{E} V, \tag{358}$$

welche zu einem Vergleich mit den bei Zug oder Druckbeanspruchung erhaltenen Ausdrücken geeignet ist.

Rechteckiger Querschnitt. Für einen Stab mit rechteckigem Querschnitte, der an beiden Enden unterstützt und über seine ganze Länge gleichförmig belastet ist, findet man

$$(359)\qquad A=\frac{2}{2JE}\int_0^{\frac{l}{2}}\left\{\frac{px\,(l-x)}{2}\right\}^2 dx= \\ =\frac{1}{240}\frac{p^2l^5}{JE}=\frac{1}{20}\frac{p^2l^5}{bh^3E}=\frac{4}{45}\frac{\sigma^2}{E}V.$$

Dynamische Wirkung. Eine dynamische Wirkung wird in derselben Weise in Betracht gezogen wie bei Zug oder Druck; zur Erläuterung diene folgendes Beispiel.

Ein Stab von unveränderlichem quadratischem Querschnitte, der an beiden Enden frei aufliegt, wird in der Mitte von einem unelastischen Stosse getroffen, indem das Gewicht Q aus der Höhe H herunterfällt.

Wenn H im Verhältnis zur Durchbiegung f des Stabes gross ist, so kann man QH gleich der Deformationsarbeit setzen.

Eine in der Mitte des Stabes statisch wirkende Kraft P' verursacht die Durchbiegung

$$f'=\frac{1}{48}\frac{P'l^3}{JE}.$$

Dabei ist die Deformationsarbeit

$$(360)\qquad A=\frac{2}{2JE}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{P'}{2}x\right)^2 dx=\frac{1}{96}\frac{P'^2l^3}{JE}= \\ =\frac{1}{8}\frac{P'^2l^3}{s^4E}=\frac{1}{18}\frac{\sigma^2}{E}V=\frac{1}{2}P'f'.$$

Für die plötzlich wirkende Kraft P und die von ihr verursachte Durchbiegung f ergiebt sich jetzt

$$A = QH = Pf.$$

Nach dem obigen allgemeinen Satze ist also

$$Pf = \frac{1}{2} P'f'.$$

Würde $f = f'$ sein, so erhielte man $P' = 2P$, d. h. ***die statisch wirkende Belastung müsste doppelt so gross wie die dynamisch wirkende sein.***

Wählt man für einen Stab aus Schmiedeisen $s = 5$ cm, $l = 300$ cm, $Q = 20$ kg, so ergiebt sich zur Berechnung der Höhe H, aus der die Last herabfallen muss, um bei ihrem Stosse den Stab bis zur Elasticitätsgrenze anzustrengen, mit Anwendung der Werte

$$\sigma = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \; E = 2000000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

die Gleichung

$$20\, H = \frac{1}{18} \frac{1600^2}{2000000} 5^2 . 300;$$

sie liefert

$$H = 27 \text{ cm}$$

und die Durchbiegung ist

$$f = 0.22 \text{ cm}.$$

Drehung.

Gemäss der Gleichung (346) ist die Deformationsarbeit eines gedrehten Stabes

$$A = \frac{1}{2G} \int \tau^2 \, dV. \tag{361}$$

Speciell erhält man für einen Stab mit unveränderlichem kreisförmigem Querschnitt vom Radius r, der an einem Ende eingespannt ist und am anderen Ende durch das Kräftepaar M gedreht wird, wenn die grösste Schubspannung mit τ bezeichnet wird, wobei also

$$\tau = \frac{r}{J_0} M$$

ist, die Deformationsarbeit

$$A = \frac{\tau^2 J_0 l}{2Gr^2} = \tfrac{1}{4}\,\frac{\tau^2}{G}\,V. \tag{362}$$

Maschinenwelle mit Schwungrad.

Wenn eine rotirende Maschinenwelle, auf der ein Schwungrad sitzt, plötzlich zum Stillstand gebracht wird, so verwandelt sich die kinetische Energie des Rades, gegenüber welcher diejenige der Welle vernachlässigt werden möge, in mechanische Arbeit, welche von der Welle aufgenommen wird. Dabei entstehen Drehungsspannungen; die Welle kann so berechnet werden, dass eine gewisse zulässige Spannung nicht überschritten wird.

Ist das Gewicht des Radkranzes (oder der auf den Umfang reducirten Masse) $Q = 0.4$ t, die Umfangsgeschwindigkeit $u = 3\ \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ und die zulässige Schubspannung $\tau = 500\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, so erhält man vermittelst der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\,u^2 = \tfrac{1}{4}\,\frac{\tau^2}{G}\,V \tag{363}$$

als erforderliches Volumen der Welle

$$V = \frac{2QGu^2}{g\tau^2} = \frac{2 \,.\, 400 \,.\, 770000 \,.\, 300^2}{9.80 \,.\, 100 \,.\, 500^2} =$$

$$= 226300\ \text{cm}^3.$$

Bem. Ein grosser Teil der kinetischen Energie wird jedenfalls zur Biegung der Arme verwandt.

Sechster Teil.

Hydromechanik.

Achter Abschnitt.

Hydrostatik.

§ 28.

Allgemeine Annahmen und Resultate.

Vollkommene Flüssigkeit.

In der Hydromechanik werden wir bei der Ableitung der theoretischen Resultate nur sog. vollkommene (oder ideale) Flüssigkeiten in Betracht ziehen, als Vertreter derselben soll das Wasser angenommen werden. *Unter einer vollkommenen Flüssigkeit versteht man einen Körper, dessen Volumen durch Druck nicht vermindert werden kann, der aber Formänderungen jeglicher anderen Art gegenüber keinen Widerstand leistet.* Er kann also als ein elastischer Körper angesehen werden, dessen Festigkeit in Bezug auf Zug, Biegung, Abscheren und Drehung gleich Null ist, während die Festigkeit in Bezug auf Druck unendlich gross ist. Die elastischen Kräfte innerhalb der vollkommenen Flüssigkeit bestehen somit in abstossenden Kräften zwischen den Molekeln, und zwar können sie eine beliebige Grösse erreichen. Auf ein Flächenelement, das zwei Volumenelemente der Flüssigkeit von einander trennt, wirken nur normale Spannungen, die immer Druckspannungen sind.

In Wirklichkeit giebt es keine vollkommene Flüssigkeiten, aber alle Flüssigkeiten weichen hinsichtlich ihrer Eigenschaften nur sehr wenig von diesem idealen Typus ab. So z. B. ist das Wasser nur in sehr geringem Grade zusammendrückbar, indem bei einer Temperatur von 15° Cels. die relative Volumenverminderung bei einem Druck von 1 Atm. $\left(1.034 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$ nur 0.000047 beträgt. Der Coefficient der Zusammendrückbarkeit ändert sich ein wenig mit der Temperatur.

Da eine vollkommene Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist, so bleiben ihre Dichte ϱ und ihr specifisches Gewicht γ in allen Punkten gleich, solange dieselbe Temperatur herrscht.

Hydrostatik und Hydrodynamik.

Die Hydromechanik zerfällt in zwei Teile, die Hydrostatik oder die Lehre vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten und die Hydrodynamik oder Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten. Wir fangen mit der Behandlung der Hydrostatik an.

Druck in einem Punkte.

Man bezeichne mit df ein Flächenelement in einem Punkte im Innern einer Flüssigkeit, die sich im Gleichgewicht befindet, mit dP die auf dieses Flächenelement wirkende normale Druckkraft; dann ist der specifische Druck (der Druck pro Flächeneinheit) auf das Flächenelement

$$p = \frac{dP}{df}.$$

Satz: *Der specifische Druck in einem Punkte einer Flüssigkeit ist derselbe nach allen Richtungen.*

Die Richtigkeit dieses fundamentalen Satzes, nach dem der Flüssigkeitsdruck auf einem Flächenelemente durch einen bestimmten Punkt nur von der Lage des Punktes, aber gar nicht von der Richtung der Normalen des Flächenelementes abhängt, ergiebt sich unmittelbar aus den

allgemeinen Gleichungen (4) in § 2, II, wenn man in ihnen

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

und

$$\alpha = \lambda, \ \beta = \mu, \ \gamma = \nu$$

einsetzt, in Übereinstimmung mit den für vollkommene Flüssigkeiten geltenden Eigenschaften.

Mit Rücksicht auf die grosse Bedeutung dieses Satzes möge hier noch folgender Beweis desselben angeführt werden: In dem betrachteten Punkte wähle man ein kleines Volumenelement von der Form eines dreiseitigen Prismas mit senkrechten Grundflächen (Fig. 179). Trägt man die auf die Seitenflächen des Prismas wirkenden Kräfte dP_1, dP_2 und dP_3 nach einander ab, so muss man ein geschlossenes Kräftedreieck erhalten. Dieses Dreieck und ein normaler Durchschnitt des Prismas sind einander ähnlich; also ist das Verhältnis zwischen einer Kraft und der entsprechenden Seite des Durchschnitts constant. Da die Seitenflächen des Prismas proportional den Kantenlängen des Durchschnitts sind, so bleibt auch das Verhältnis zwischen einer Kraft und der Seitenfläche, auf welche sie wirkt, constant, und zwar gleich dem specifischen Drucke p im Punkte.

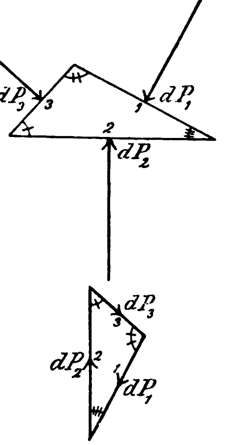


Fig. 179.

Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts.

Die allgemeinen Gleichungen für den Druck in einer Flüssigkeit im Gleichgewichtszustande sind von Euler aufgestellt worden. Sie gehen aus den Gleichungen (3) in § 2, II durch die Substitution $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ hervor, ergeben sich aber auch einfach in folgender Weise. Man wähle ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 180).

Der specifische Druck p in einem Punkte mit den Coordinaten x, y und z ist eine gewisse, im allgemeinen nicht direct bekannte Function von x, y, z. Die Componenten nach den Coordinatenaxen der auf die Masseneinheit der

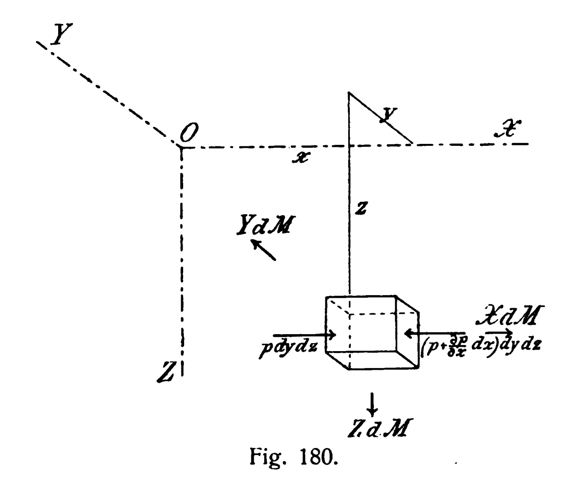


Fig. 180.

Flüssigkeit wirkenden äusseren Kraft (z. B. der Schwere) mögen mit X, Y und Z bezeichnet werden. Man wähle ferner im Punkte ein unendlich kleines parallelepipedisches Volumenelement mit den Kanten dx, dy und dz parallel den Coordinatenaxen. Dieses Element hat die Masse

$$dM = \varrho \, dx \, dy \, dz = \frac{\gamma}{g} \, dx \, dy \, dz;$$

die Componenten der auf dasselbe wirkenden äusseren Kraft sind

$$X \, dM, \quad Y \, dM \text{ und } Z \, dM.$$

Auf die der yz-Ebene parallelen Seitenflächen des parallelepipedischen Elementes wirken die Druckkräfte $p \, dy \, dz$ in der Richtung der positiven und $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \, dz$ in der Richtung der negativen x-Axe. Setzt man jetzt

die Summe der Projectionen aller Kräfte auf die x-Axe gleich Null, so erhält man

$$p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz + X\,dM = 0.$$

Nach Einsetzung des Wertes von dM ergiebt sich hieraus

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g}X; \tag{364}$$

in analoger Weise findet man

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g}Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g}Z. \tag{364}$$

Diese drei Gleichungen können in eine einzige zusammengefasst werden, nämlich

$$dp = \frac{\gamma}{g}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz); \tag{365}$$

sie ist die Grundgleichung der Hydrostatik.

Gesetz für den Druck.

Integrirt man die Gleichung (365), so findet man

$$p = F(x, y, z) + \text{Const.}, \tag{366}$$

wo eine unbestimmte Constante enthalten ist. Um diese Constante zu bestimmen, muss man den Druck in irgend einem Punkte der Flüssigkeit kennen; mit Hülfe der Gleichung (366) findet man dann den Druck in allen anderen Punkten der Flüssigkeit. Oft setzt man

$$p = F(x, y, z) + p_0, \tag{367}$$

wo $F(x, y, z)$ im Coordinatenanfangspunkte O verschwindet und p_0 den Druck in O bezeichnet.

Niveaufläche.

Wählt man in einer der Gleichungen (366) oder (367) $p = \text{Const.}$, so stellt die Gleichung eine Fläche dar, in

deren sämtlichen Punkten der specifische Druck der gleiche ist; die Fläche heisst N i v e a u f l ä c h e. Für verschiedene constante Werte von p erhält man eine ganze Schaar von Niveauflächen. Durch jeden Punkt der Flüssigkeit geht e i n e und n u r e i n e Niveaufläche, da der Druck nicht mehrere Werte in demselben Punkte haben kann. Eine von den Niveauflächen ist die f r e i e O b e r f l ä c h e der Flüssigkeit, wenn der Druck auf dieselbe constant ist, z. B. die Berührungsfläche mit der Atmosphäre. In der freien Oberfläche ist der Druck in dem letzten Falle gleich 1 Atm., d. h. $1.034 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2}$ (bei 760 mm Barometerhöhe).

Die Richtungscosinusse der Normalen einer Niveaufläche sind proportional $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$, d. h. proportional $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$. Da die drei letzten Grössen gemäss den Gleichungen (364) proportional den Componenten X, Y und Z der äusseren Kraft sind, so ergiebt sich der Satz: *Die äussere Kraft ist in jedem Punkte der Flüssigkeit senkrecht zu der durch den Punkt gehenden Niveaufläche.*

Gesetz von P a s c a l.

Wenn die Flüssigkeit überall von festen Wänden eingeschlossen ist, nicht allzu grosse Ausdehnung besitzt und einem bedeutenden Drucke ausgesetzt ist, so kann man die auf die Masse wirkende äussere Kraft vernachlässigen, speciell das eigene Gewicht der Flüssigkeit. Wählt man in der Gleichung (365) $X = Y = Z = 0$, so ergiebt sich $p =$ Const., d. h. der specifische Druck bleibt in allen Punkten der Flüssigkeit der gleiche. Hat man z. B. ein Gefäss (Fig. 181), das mit zwei beweglichen Kolben versehen und mit Wasser gefüllt ist, so

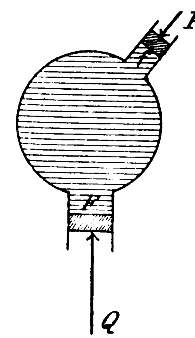


Fig. 181.

sind die auf die Kolbenflächen ausgeübten Drücke P und Q im Zustande des Gleichgewichts proportional den Flächen f und F. Der specifische Druck p an beiden Kolben (und überall in der Flüssigkeit) ist

$$p = \frac{P}{f} = \frac{Q}{F}. \tag{368}$$

Dieses Gesetz, nach welchem ***der Druck gleichförmig in der Flüssigkeit fortgepflanzt wird,*** heisst Pascals Gesetz.

Drückt man den Kolben f um das Stück x nach innen, so führt die Kraft P die Arbeit Px aus. Da die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist, so verschiebt sich der Kolben F nach aussen um das Stück $\frac{f}{F}x$; der von der Flüssigkeit auf ihn ausgeübte Druck führt dabei die Arbeit

$$Q\frac{f}{F}x = \frac{F}{f}P\frac{f}{F}x = Px$$

aus, d. h. die Arbeit wird ohne Verlust durch die Flüssigkeit von dem einen Kolben auf den anderen übertragen. In Wirklichkeit giebt es immer einen Verlust an Arbeit, der grösstenteils von der Reibung an den Kolbenwänden herrührt.

Diese Methode der Übertragung der Arbeit hat ausserdem den Vorteil, dass die Kraft P in fast unbegrenztem Verhältnis vergrössert werden kann. Eine wichtige Anwendung findet dieser Satz bei der hydraulischen Presse, deren Princip schon von Pascal angegeben wurde, während der englische Ingenieur Bramah der erste war, der die praktischen Schwierigkeiten bei der Construction überwand.

Anwendung.

Hydraulische Presse.

Hydraulische Presse. Die hydraulische Presse besteht in der Hauptsache aus zwei durch ein Rohr mit einander verbundenen Cylindern, von welchen der eine einen grossen, der andere einen kleinen Querschnitt hat (Fig. 182). In den Cylindern befinden sich bewegliche Kolben. Der Raum zwischen den Kolben ist mit Wasser gefüllt. Auf den kleineren oder Pumpenkolben wird ein Druck ausgeübt; durch das in der Presse sich befindende Wasser wird dieser Druck nach dem grösseren oder Presskolben übertragen. Die Kraft wird dabei im Verhältnis der Fläche des Presskolbens zu der Fläche des Pumpenkolbens vergrössert, so dass man

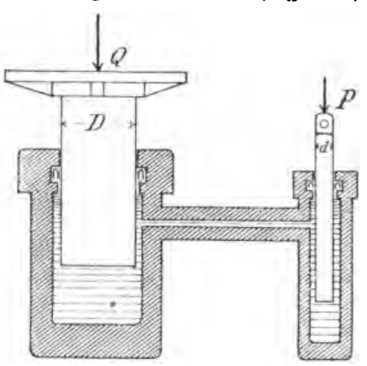
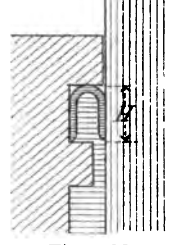


Fig. 182.

$$Q = \frac{D^2}{d^2} P \tag{369}$$

erhält. Die Kraft P wird gewöhnlich mit Hülfe eines Hebels hervorgebracht und der Druck im Wasser wird allmählich dadurch vergrössert oder auf seiner ursprünglichen Grösse erhalten, dass man Wasser in den kleineren Cylinder hineinpumpt, je nachdem der Presskolben sich erhöht. Die neueren Constructionen der hydraulischen Presse zeigen übrigens mancherlei Modificationen.


Fig. 183.

Infolge der Reibung zwischen den Kolben und den Cylinderwänden erreicht Q nicht den Wert (369); zugleich vermindert sich der Wirkungsgrad der Presse. Man nehme an, dass beide Kolben mit doppelt gebogenen Manschetten aus Leder (Fig. 183) versehen sind, welche einen wasserdichten Verschluss bilden und durch das Wasser selbst gegen die Wände des Kolbens und des Cylinders gepresst werden. Beim Pumpenkolben ist dann der Druck des Wassers auf die Grundfläche des Kolbens

$$p \frac{\pi d^2}{4}$$

und der gesamte Reibungswiderstand an der Manschette

$$fp\pi dh,$$

wo h die Höhe der Berührungsfläche ist. Bewegt sich der Kolben gleichförmig nach unten, so liefert die Gleichgewichtsbedingung

$$P = p\frac{\pi d^2}{4} + fp\pi dh.$$

Beim Presskolben ergiebt sich in derselben Weise

$$Q = p\frac{\pi D^2}{4} - fp\pi DH.$$

Mit Anwendung der Bezeichnungen

$$n = \frac{h}{d}, \quad N = \frac{H}{D}$$

hat man

(370)
$$P = \tfrac{1}{4} p\pi d^2 (1 + 4fn),$$
$$Q = \tfrac{1}{4} p\pi D^2 (1 - 4fN),$$

und erhält für den Pressdruck Q

(371)
$$Q = \frac{D^2}{d^2}\frac{1 - 4fN}{1 + 4fn} P.$$

Der Wirkungsgrad der Presse (siehe p. 478, I) ist

(372)
$$\eta = \frac{P_n}{P} = \frac{1 - 4fN}{1 + 4fn}.$$

Einfluss der Schwerkraft.

Unter den äusseren Kräften, welche auf die Massenelemente einer Flüssigkeit wirken, spielt die Schwerkraft die Hauptrolle; sie wird im folgenden allein in Betracht gezogen. Wenn die z-Axe die Richtung lotrecht nach unten hat, so muss man in der Gleichung (365)

$$X = Y = 0, \; Z = g$$

einsetzen. Man erhält dann

$$dp = \gamma dz$$

und

(373)
$$p = \gamma z + p_0.$$

Macht man hier $p = \text{Const.}$, so folgt $z = \text{Const.}$, d. h. *die Niveauflächen sind horizontale Ebenen. Speciell bildet die freie Fläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene.* Vorausgesetzt ist dabei natürlich, die Ausdehnung der Flüssigkeit sei nicht so gross, dass die Richtung der Schwerkraft nicht mehr als constant angenommen werden kann.

Kommunicierende Röhren.

Der Satz von der Gleichheit des Druckes in allen Punkten einer horizontalen Ebene findet Anwendung bei den kommunicierenden Gefässen (Röhren). Wenn nur eine einzige Flüssigkeit vorhanden ist, so stehen die freien Oberflächen in beiden Gefässen gleich hoch (Fig. 184). Befinden sich aber in den Gefässen zwei Flüssigkeiten von verschiedenem specifischem Gewicht, die sich nicht mit einander mischen, so steht die Oberfläche der leichteren Flüssigkeit höher (Fig. 185). Bezeichnet man die Höhenunterschiede der beiden Flüssigkeitsoberflächen von der gemeinsamen Trennungsfläche aus mit h und h', die specifischen Gewichte mit γ und γ', so ist der Druck in der Trennungsfläche

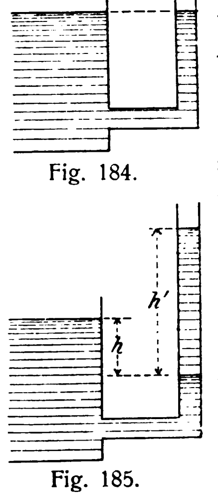


Fig. 184.

Fig. 185.

$$p_0 + \gamma h = p_0 + \gamma' h',$$

wo p_0 den Atmosphärendruck darstellt. Also ergiebt sich

$$\frac{h'}{h} = \frac{\gamma}{\gamma'}, \tag{374}$$

d. h. *die betrachteten Höhen sind umgekehrt proportional den specifischen Gewichten der Flüssigkeiten.*

§ 29.

Hydrostatischer Druck auf ebene Flächen.

Druckhöhe.

Bei der Bestimmung des Druckes, den eine ruhende Flüssigkeit auf einen Teil der Wand des Gefässes ausübt, in dem sie enthalten ist, des sog. h y d r o s t a t i s c h e n D r u c k e s, geht man von der Grundgleichung (373)

$$p = p_0 + \gamma z$$

für den specifischen Druck innerhalb der Flüssigkeit aus. Dabei möge p_0 den Druck in der freien Oberfläche, z die Tiefe des betrachteten Punktes unterhalb der Oberfläche bezeichnen. Bezeichnet man noch mit

$$Z = z + \frac{p_0}{\gamma} \tag{375}$$

die Tiefe unterhalb einer horizontalen Ebene, welche sich in der Höhe $\frac{p_0}{\gamma}$ oberhalb der freien Oberfläche befindet, so erhält man für den spec. Druck den einfacheren Ausdruck

$$p = \gamma Z. \tag{376}$$

Für $p_0 = 0$ liefert die Gleichung (373) einen ähnlichen Ausdruck

$$p = \gamma z. \tag{377}$$

Man erkennt daraus, dass Z die Höhe oberhalb des betrachteten Punktes bezeichnet, bis zu welcher die Flüssigkeit sich erstrecken müsste, wenn der Druck auf der freien Oberfläche gleich Null wäre (Fig. 186). Im folgenden wird nur die Bezeichnung

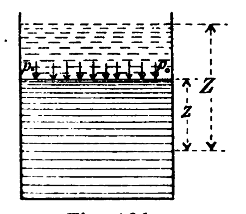


Fig. 186.

z benützt werden; diese Grösse heisst Druckhöhe (genauer hydrostatische Druckhöhe), sie möge von der gedachten Horizontalebene für den Druck Null oder von der wirklichen freien Oberfläche aus gerechnet sein. Dabei genügt die eine Gleichung

$$p = \gamma z. \tag{377}$$

Meistens kommt nur die Höhe von der wirklichen freien Oberfläche in Betracht, da p_0 (gewöhnlich der Atmosphärendruck) von beiden Seiten auf die Gefässwand wirkt. Der Kürze wegen werde die Horizontalebene, von welcher aus z gerechnet wird, das Nullniveau benannt.

Die Gleichung (377) enthält den Satz: *Der specifische Druck in einem Punkte einer Flüssigkeit ist gleich dem Gewichte eines geraden Flüssigkeitsprismas, dessen Grundfläche die Flächeneinheit und dessen Höhe die Druckhöhe des Punktes ist.*

Grösse des Druckes gegen eine ebene Fläche.

Die elementaren Drücke, welche auf ein begrenztes ebenes Stück der Gefässwand wirken, sind alle parallel; ihre Resultirende, d. h. der totale Druck auf das betrachtete Flächenstück ist gleich ihrer Summe. Der Druck auf das Flächenelement dF mit der Druckhöhe z ist $\gamma z dF$ (Fig. 187), der ganze Druck P gegen die Fläche F beträgt also

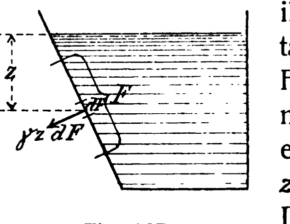


Fig. 187.

$$P = \int \gamma z \, dF = \gamma \int z dF = \gamma \, F z_0, \tag{378}$$

wo z_0 die Druckhöhe im Schwerpunkte der Fläche F bezeichnet (Vergl. § 67, I). Die Gleichung (378) zeigt, dass *der Druck gegen eine begrenzte ebene Fläche gleich dem Gewichte eines geraden Flüssigkeitsprismas ist, welches die*

Fläche zur Grundfläche und die Druckhöhe des Schwerpunktes zur Höhe hat.

Ausser der Grösse des Druckes P muss ihr Angriffspunkt, der sog. Druckmittelpunkt bestimmt werden. Der Druckmittelpunkt T fällt nur dann mit dem Schwerpunkte S der Fläche zusammen, wenn die Fläche horizontal ist, liegt aber in allen anderen Fällen tiefer als der Schwerpunkt. Man bezeichne seinen Abstand von dem Nullniveau mit ζ; wenn man jetzt die statischen Momente in Bezug auf das Nullniveau nimmt, so erhält man

Druckmittelpunkt.

$$\zeta \int \gamma z \, dF = \int \gamma z^2 \, dF$$

und

$$\zeta = \frac{\int z^2 \, dF}{F z_0}. \tag{379}$$

Diesen Ausdruck transformirt man zweckmässig in folgender Weise. Man wähle die Schnittlinie zwischen dem Nullniveau und der ebenen Wandfläche als y-Axe und die x-Axe senkrecht dazu durch den Schwerpunkt S der gedrückten Fläche (Fig. 188). Ferner bezeichne man mit α den Neigungswinkel der Wandfläche gegen die Horizontalebene, mit x und y die Coordinaten des Flächenelementes dF, mit x_0 und $y_0 = 0$ die Coordinaten des Schwerpunktes S sowie mit ξ und η die Coordinaten des Druckmittelpunktes T. Dann ergiebt sich

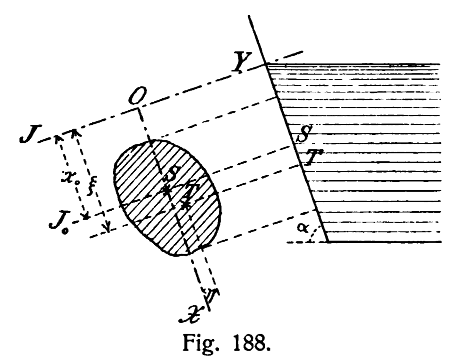


Fig. 188.

$$\frac{z}{x} = \frac{z_0}{x_0} = \frac{\zeta}{\xi} = \sin \alpha$$

und die Gleichung (379) liefert

$$\xi = \frac{\int x^2 \, dF}{F x_0} = \frac{J}{F x_0}, \tag{380}$$

wo J das Trägheitsmoment des ebenen Flächenstückes in Bezug auf die y-Axe ist. Es sei J_0 das Trägheitsmoment dieser Fläche in Bezug auf die der y-Axe parallele Axe durch den Schwerpunkt; dann folgt

$$J = J_0 + F x_0^2$$

und aus (380)

$$\xi = x_0 + \frac{J_0}{F x_0}. \tag{381}$$

Ist die gedrückte Fläche symmetrisch in Bezug auf die y-Axe, so liegt der Druckmittelpunkt auf dieser Axe und man hat $\eta = 0$. Anderenfalls berechnet man η, indem man die Momente der Druckkräfte in Bezug auf die x-Axe nimmt. Man erhält

$$P\eta = \gamma \, F z_0 \eta = \gamma \int zy \, dF,$$

$$\eta = \frac{\int zy \, dF}{F z_0} = \frac{\int xy \, dF}{F x_0}. \tag{382 a}$$

Hier bezeichnet $\int xy \, dF$ das Centrifugalmoment der Fläche F in Bezug auf die x- und y-Axe; es ist gleich dem Centrifugalmomente $C = \int (x - x_0) \, y \, dF$ in Bezug auf das Axenkreuz, das von der x-Axe und der der y-Axe parallelen Schwerpunktaxe gebildet wird, so dass man auch

$$\eta = \frac{C}{F x_0} \tag{382 b}$$

hat.

Für eine Rechteckfläche mit zwei dem Nullniveau parallelen Seiten (Fig. 189) ergiebt sich

$$J_0 = \tfrac{1}{12}\, b h^3,$$

$$\xi = x_0 + \tfrac{1}{12}\frac{h^2}{x_0} = x_0 \left\{ 1 + \tfrac{1}{12}\frac{h^2}{x_0^2} \right\}.$$

Liegt die obere Kante des Rechtecks im Flüssigkeitsspiegel, so ist

$$x_0 = \frac{h}{2}$$

und

$$\xi = \frac{2}{3} h. \tag{383}$$

Oft kann der Druckmittelpunkt ohne Rechnung in folgender Weise erhalten werden. In jedem Punkte der gedrückten ebenen Fläche construirt man eine Senkrechte dazu und trägt auf ihr die Druckhöhe des Punktes ab. Dabei entsteht ein Prisma oder ein cylindrischer Körper, welcher von einer der beiden Grundflächen schief und von der anderen Grundfläche normal geschnitten wird. Der Druckmittelpunkt ist der Punkt, wo die vom Schwerpunkt des Körpers auf die Grundfläche gefällte Senkrechte sie trifft.

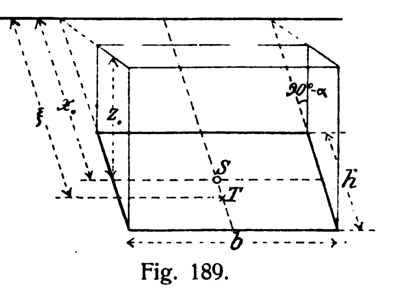


Fig. 189.

Ist die Fläche ein Rechteck in einer verticalen Ebene mit einer Seite im Flüssigkeitsspiegel (Fig. 190), so ist der nach dem obigen con-

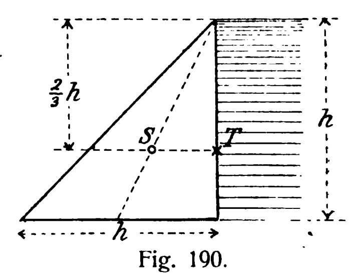


Fig. 190.

struirte Körper ein Prisma, dessen Durchschnitt ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist. Der Schwerpunkt des Prismas ist der Halbirungspunkt der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden dreieckförmigen Grundflächen vereinigt. Man erhält also wieder den früheren Wert

$$\xi = \tfrac{2}{3} h.$$

Druckcomponente nach einer bestimmten Richtung.

Oft verlangt man die Componente des hydrostatischen Druckes auf eine ebene Fläche F nach einer bestimmten Richtung. Ist β der Winkel zwischen der Richtung der Kraft P und der gegebenen Richtung (Fig. 191), so ist die betreffende Druckcomponente

Fig. 191.

$$P \cos\beta = \gamma F z_0 \cos\beta. \tag{384}$$

Hier bezeichnet $F \cos\beta$ die Projection der Fläche F auf eine Normalebene zur festgesetzten Richtung. Das Resultat kann deshalb in folgender Form ausgedrückt werden:

Die Componente des hydrostatischen Druckes gegen eine ebene Fläche nach einer bestimmten Richtung ist gleich dem Gewicht eines geraden Flüssigkeitsprismas, dessen Höhe die Druckhöhe im Schwerpunkte der gegebenen Fläche ist und dessen Grundfläche die Projection der gegebenen Fläche auf eine Normalebene zu der betreffenden Richtung ist.

Anwendungen.

Druckmittelpunkt eines Dreieckes.

1) Der Druckmittelpunkt eines Dreieckes in einer Verticalebene, dessen Grundlinie horizontal ist und dessen Spitze im Flüssigkeitsspiegel sich befindet (Fig. 192), wird am einfachsten durch Construction des auf p. 275 erwähnten Körpers erhalten. Dieser Körper ist eine Pyramide; der Höhenunterschied zwischen der Spitze und dem Schwerpunkte der Pyramide ist $\frac{3}{4}$ von der Höhe des Dreieckes und stellt die Tiefe des Druckmittelpunktes unter dem Flüssigkeitsspiegel dar. Der Druckmittelpunkt liegt auf der Geraden, die von der Spitze des Dreieckes nach der Mitte der horizontalen Seite gezogen wird.

Liegt die Grundlinie des Dreieckes im Flüssigkeitsspiegel, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$\xi = \frac{h}{2}.$$

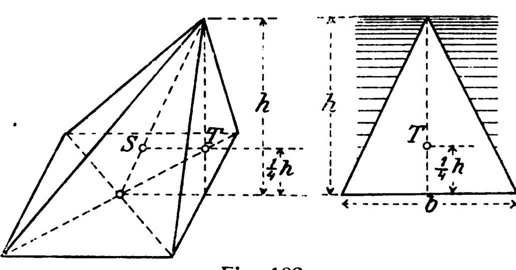


Fig. 192.

Druckmittelpunkt des Kreises.

2) Den Druckmittelpunkt eines Kreises in einer verticalen Ebene (Fig. 193) bestimmt man am einfachsten analytisch. Mit den Bezeichnungen der Figur hat man

$$J_0 = \tfrac{1}{4}\pi r^4,$$

$$\frac{J_0}{F} = \tfrac{1}{4} r^2,$$

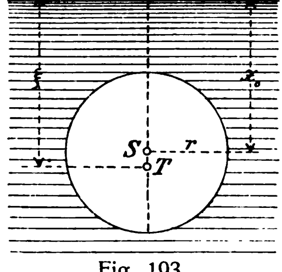


Fig. 193.

und die Gleichung (381) liefert

$$\xi = x_0 \left\{ 1 + \tfrac{1}{4} \frac{r^2}{x_0^2} \right\}. \tag{385}$$

Speciell erhält man mit $x_0 = r$, wenn also der höchste Punkt des Kreises im Flüssigkeitsspiegel liegt,

$$\xi = \tfrac{5}{4} r. \tag{386}$$

Stabilität einer Mauer.

3) Auf die in der Figur 194 dargestellte senkrechte Mauer wirkt von der einen Seite der Druck des Wassers; er beträgt pro Längeneinheit

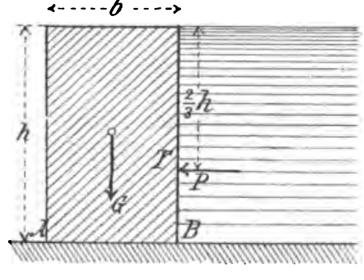


Fig. 194.

$$P = \gamma h \frac{h}{2} = \tfrac{1}{2}\gamma h^2.$$

Ist γ' das specifische Gewicht des Mauermateriales, so ist das Gewicht der Mauer pro Längeneinheit

$$G = \gamma' b h .$$

Die Bedingung, dass die Mauer nicht um die Kante A kippe, vorausgesetzt dass sie nicht besonders befestigt ist, wird also

$$G \frac{b}{2} > P \frac{h}{3} .$$

Setzt man die Werte von G und P ein, so ergiebt sich daraus

$$\frac{b}{h} > \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma}{\gamma'}} . \tag{387}$$

Die Bedingung der Stabilität gegen Verschiebung längs der Unterlage ist, wenn die Reibung allein der Verschiebung entgegenwirkt und f der Reibungscoefficient ist,

$$f G > P$$

oder

$$\frac{b}{h} > \frac{1}{2f} \frac{\gamma}{\gamma'} . \tag{388}$$

Speciell erhält man mit $\gamma = 1$, $\gamma' = 3$, $f = 0.75$ aus der Gleichung (387)

$$\frac{b}{h} > 0.333$$

und aus der Gleichung (388)

$$\frac{b}{h} > 0.222 .$$

Die Gefahr des Kippens ist also die grössere.

§ 30.

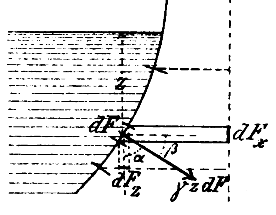
Hydrostatischer Druck auf krumme Flächen. Princip von Archimedes.

Reduction der Druckkräfte. Die Drücke auf die Elemente einer krummen Fläche bilden ein System von Kräften im Raume und liefern im allgemeinen nicht eine einzige Resultirende, sondern eine

Resultirende und ein resultirendes Kräftepaar. Vorteilhafter ist es jedoch eine andere Reduction der Kräfte zu benützen. Man zerlegt jeden Elementardruck in drei zu einander senkrechte Componenten, eine verticale und zwei horizontale. Dann setzt man alle gleich gerichteten Componenten zusammen und erhält so im allgemeinen drei Resultirende von bestimmter Grösse und auf bestimmten Richtungslinien, von welchen eine vertical und die beiden anderen horizontal sind.

Horizontaldruck und Verticaldruck.

Es sei dF (Fig. 195) ein Flächenelement, z die Druckhöhe, α der Winkel, den die Normale dieses Flächenelementes im Sinne des hydrostatischen Druckes mit der Verticalen nach unten einschliesst, β der Winkel derselben Normalen mit einer bestimmten horizontalen Richtung. Dann ist der Druck gegen das Flächenelement gleich $\gamma z dF$; seine verticale und horizontale Componente sind bez. $\gamma z \cos \alpha \,.\, dF$ und $\gamma z \cos \beta \,.\, dF$. Die Resultirende der horizontalen Drücke ist


Fig. 195.

$$P_x = \gamma \int z \cos \beta \,.\, dF \tag{389}$$

und die Resultirende der verticalen Drücke

$$P_z = \gamma \int z \cos \alpha \,.\, dF. \tag{390}$$

Die Grösse $\cos \beta \,.\, dF$ ist die Projection dF_x des Flächenelementes dF auf eine Normalebene zu der betrachteten horizontalen Richtung; man hat ferner

$$\int z \, dF_x = F_x \, z_x,$$

wo F_x die Projection der ganzen Fläche auf die genannte Normalebene und z_x der Abstand des Schwerpunktes der Projection von dem Nullniveau ist. Die Gleichung (389) ergiebt jetzt

$$P_x = \gamma F_x z_x, \tag{391}$$

d. h. *die Resultirende der Drücke auf eine krumme Fläche nach einer bestimmten horizontalen Richtung ist gleich dem Gewichte eines geraden Flüssigkeitsprismas, dessen Grundfläche die Projection der gedrückten Fläche auf eine senkrecht zu der betreffenden Richtung stehende Ebene ist und dessen Höhe gleich dem Abstande des Schwerpunktes der Projectionsfläche von dem Nullniveau ist. Die Richtungslinie der Resultirenden geht durch den Druckmittelpunkt der Projectionsfläche.*

Die Grösse $\cos\alpha\,.\,dF$ in der Gleichung (390) bezeichnet die Projection von dF auf eine horizontale Ebene, $\gamma z\cos\alpha\,.\,dF$ ist das Gewicht einer Flüssigkeitssäule, die sich oberhalb des Flächenelementes befindet. Nach der Gleichung (390) ist *die verticale Resultirende sämtlicher Drücke gegen die krumme Fläche gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die krumme Fläche ist und welche oben vom Nullniveau begrenzt wird. Die Richtungslinie der Resultirenden geht durch den Schwerpunkt der Säule.*

Totaler Druck der Flüssigkeit in einem Gefäss.

Es mögen jetzt sämtliche Drücke in Betracht gezogen werden, welche eine in ein Gefäss eingeschlossene Flüssigkeit auf die Gefässwandungen ausübt (Fig. 196). Für jede horizontale Richtung ist die Resultirende gleich Null, was man daraus ersieht, dass $\int z\cos\beta\, dF = \int z\, dF_x$ paarweise gleich grosse Elemente mit entgegengesetzten Vorzeichen enthält, die von den Elementen der Wandungen herrühren, welche durch einen zur betreffenden Richtung parallelen Cylinder ausgeschnitten werden. Die verticale Resultirende ist gleich dem Gewicht der in dem Gefäss enthaltenen Flüssigkeit und greift in ihrem Schwerpunkte an. Also ist auch die Resultirende sämtlicher Drücke gegen

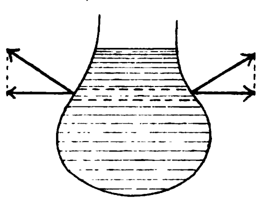


Fig. 196.

die Gefässwandungen gleich dem Gewicht der ganzen Flüssigkeitsmenge.

Druck gegen einen ebenen Boden.

Wenn das Gefäss einen ebenen horizontalen Boden hat, so ist im allgemeinen der Druck auf den Boden nicht gleich dem Gewichte der eingeschlossenen Flüssigkeit. So z. B. ist dieser Druck für das Gefäss in Fig. 197 klei-

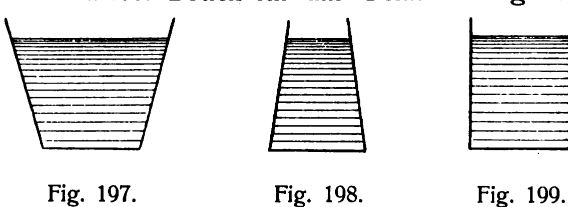


Fig. 197. Fig. 198. Fig. 199.

ner, für das Gefäss in Fig. 198 grösser als das Gewicht der Flüssigkeit; nur für das cylindrische Gefäss in Fig. 199 sind Druck und Gewicht gleich gross. Die Beobachtung, dass eine Flüssigkeit einen grösseren Druck gegen eine ebene Fläche ausüben kann, als ihr Gewicht beträgt, wurde zuerst von S t e v i n u s gemacht. Diese Thatsache wird das h y d r o s t a t i s c h e P a r a d o x o n genannt; sie findet ihre Erklärung darin, dass wenn der Druck gegen den Boden grösser als das Gewicht der Flüssigkeit ist, auch verticale nach oben gerichtete Druckcomponenten an den Gefässwandungen vorhanden sind.

Princip von Archimedes.

Wenn ein Körper vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, so erfährt er von allen Seiten Drücke, welche in jedem Punkte der Begrenzungsfläche des Körpers senkrecht zu derselben gerichtet sind (Fig. 200). Die horizontalen Componenten dieser Drücke heben sich auf, was man daraus ersieht, wenn man den Körper in horizontale cylindrische Elemente zerlegt. Bei einem verticalen cylindrischen Elemente

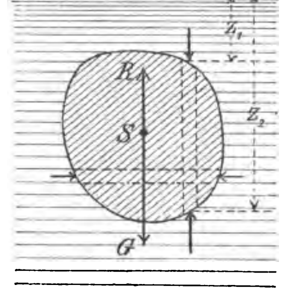


Fig. 200.

mit dem Durchschnitt dF_z giebt es oben eine verticale Druckcomponente $\gamma z_1 dF_z$ mit der Richtung nach unten und unten eine verticale Durckcomponente $\gamma z_2 dF_z$ mit der Richtung nach oben; zusammen liefern sie eine nach oben gerichtete Resultirende

$$dR = \gamma\,(z_2 - z_1)\,dF_z;$$

Auftrieb. für den ganzen Körper erhält man daraus den sog. hydrostatischen Auftrieb

$$R = \gamma \int (z_2 - z_1)\,dF_z = \gamma\,V,$$

wo V das Volumen der verdrängten Flüssigkeit bezeichnet. Diese Gleichung enthält das Princip von Archimedes:

Auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper wirkt ein hydrostatischer Auftrieb, der gleich gross mit dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist.

In etwas anderer Form lautet der Satz: *Ein Körper verliert in einer Flüssigkeit so viel von seinem Gewicht, wie die verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt.*

Der Angriffspunkt des hydrostatischen Auftriebs ist der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge; wenn der Körper nicht homogen oder hohl ist, so fällt er im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkt des Körpers zusammen. Hohlräume innerhalb des Körpers wirken nur dann auf die Grösse des hydrostatischen Auftriebs ein, wenn die Flüssigkeit in sie hineindringen kann.

Deplacement. Wie man in der gleichen Weise erkennt, gilt das Princip von Archimedes auch für Körper, welche nur teilweise in eine Flüssigkeit eingetaucht sind. Der hydrostatische Auftrieb ist gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit, dem sog. Deplacement, und greift in dessen Schwerpunkt an.

Man benützt das Princip von Archimedes u. a. bei der Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper mit Hülfe der **hydrostatischen Wage** oder mit Anwendung von **Aräometern**, ferner bei der Bestimmung der Rauminhalte von Körpern, des Concentrationsgrades von Flüssigkeiten u. s. w., wie in der Physik näher dargelegt wird.

§ 31.

Gleichgewicht schwimmender Körper.

Gleichgewicht vollständig eingetauchter Körper.

Damit ein schwerer Körper, der vollständig ins Wasser eingetaucht ist, im Gleichgewicht sei, müssen die beiden auf ihn wirkenden Kräfte, d. h. sein Gewicht G und der hydrostatische Auftrieb R gleich gross sein und auf derselben Richtungslinie liegen. Die Bedingung

$$G = R = \gamma V$$

kann auch so ausgedrückt werden, dass *die mittlere Dichte des Körpers gleich derjenigen des Wassers sein muss.* Nach der zweiten Bedingung *müssen die Schwerpunkte des Körpers und der verdrängten Wassermenge sich auf derselben Verticalen befinden.* Das Gleichgewicht ist stabil, labil oder indifferent, je nachdem der Schwerpunkt des Körpers tiefer oder höher als der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt oder damit zusammenfällt. Bei einem homogenen Körper ohne Hohlräume ist also das Gleichgewicht indifferent.

Wenn das specifische Gewicht des Körpers grösser als dasjenige des Wassers ist, so sinkt der Körper; ist es kleiner, so steigt der Körper zum Flüssigkeitsspiegel hinauf, wo er in einer bestimmten Lage schwimmt.

Ein Metallcylinder mit dem Durchmesser d, der Länge L und dem specifischen Gewichte γ ist umgeben von einem Korkring mit der Länge l und dem specifischen Gewichte γ' (Fig. 201), Man bestimme den Durchmesser D des Korkringes so, dass das System im

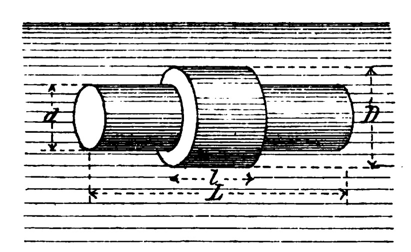


Fig. 201.

Wasser vom specifischen Gewichte 1 weder sinkt noch steigt.

Das Gewicht des Metallcylinders ist

$$\gamma \frac{\pi d^2}{4} L,$$

dasjenige des Korkringes

$$\gamma' \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)\, l$$

und dasjenige der verdrängten Flüssigkeit

$$\frac{\pi d^2}{4} L + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)\, l.$$

Also erhält man

$$\gamma \frac{\pi d^2}{4} L + \gamma' \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)\, l = \frac{\pi d^2}{4} L + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)\, l$$

und berechnet daraus

$$D = d \sqrt{\frac{L}{l} \frac{\gamma - 1}{1 - \gamma'} + 1}.$$

Gleichgewicht schwimmender Körper.

Damit ein Körper, der auf dem Wasser schwimmt, im Gleichgewichte sei, *muss das eigene Gewicht des Körpers gleich demjenigen des Deplacements sein, und ausserdem müssen die Schwerpunkte von Körper und Deplacement sich in derselben Verticalen befinden.* Die Untersuchung der Beschaffenheit des Gleichgewichtes ist dabei complicirter als bei vollständig eingetauchten Körpern; sie wird in § 32 ausgeführt. Die erste Aufgabe bei schwimmenden Körpern ist die Bestimmung der Gleichgewichtslage selbst.

Schwimmebene und Axe.

Man versteht unter S c h w i m m e b e n e eine Ebene des Körpers, welche sich im Wasserspiegel befindet, wenn der Körper im Gleichgewicht ist. Ein Körper kann eine, mehrere oder unendlich viele Schwimmebenen besitzen. *Un-*



ter Schwimmaxe wird eine aus dem Schwerpunkt des Körpers gefällte Senkrechte auf eine Schwimmebene verstanden. In der Gleichgewichtslage ist die Schwimmaxe vertical und geht durch den Schwerpunkt des Deplacements.

Beispiele.

Bei den folgenden Bestimmungen von Schwimmebenen einiger homogener Körper ist das specifische Gewicht des Wassers gleich 1 gesetzt worden; das specifische Gewicht γ des Körpers ist kleiner als 1.

Prisma und Cylinder.

Für ein gerades Prisma, das mit verticaler Axe schwimmt (Fig. 202), erhält man die Einsenkungstiefe z, wenn man das Gewicht γAh des Körpers gleich dem Gewicht Az des Deplacementes setzt. Daraus folgt

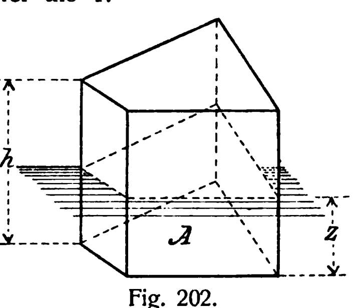


Fig. 202.

(392) $$z = \gamma h.$$

Das nämliche gilt für einen geraden Cylinder.

Pyramide.

Für eine Pyramide, die mit eingesenkter Spitze und horizontaler Grundfläche (Fig. 203) schwimmt, ergiebt sich

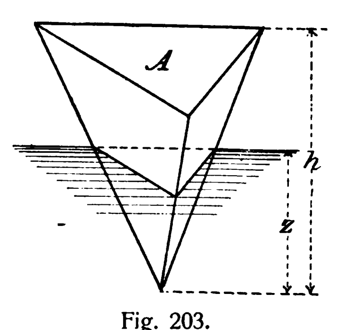


Fig. 203.

$$\gamma \frac{Ah}{3} = \frac{Ah}{3} \frac{z^3}{h^3}$$

und

(393) $$z = \sqrt[3]{\gamma}\, h.$$

Wenn die Pyramide mit der Spitze nach oben schwimmt und die Grundfläche horizontal ist (Fig. 204), so erhält man

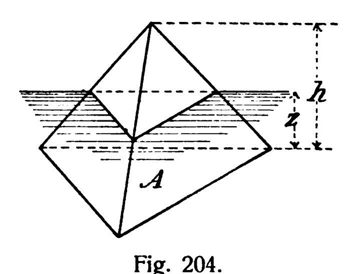


Fig. 204.

$$\gamma \frac{Ah}{3} = \frac{Ah}{3} \left\{ 1 - \frac{(h-z)^3}{h^3} \right\}$$

und berechnet für den Abstand zwischen der Schwimmebene und der Grundfläche

$$z = \left\{ 1 - \sqrt[3]{1-\gamma} \right\} h. \tag{394}$$

Kugel.

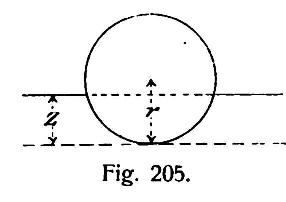


Fig. 205.

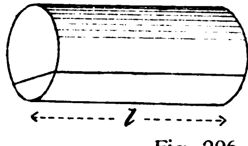
Für eine Kugel (Fig. 205) findet man mit Hülfe einer bekannten stereometrischen Formel

$$\gamma \tfrac{4}{3} \pi r^3 = \pi z^2 \left(r - \frac{z}{3} \right),$$

d. h. die Einsenkungstiefe ist eine Wurzel der Gleichung dritten Grades

$$z^3 - 3rz^2 + 4\gamma r^3 = 0. \tag{395}$$

Liegender Cylinder.



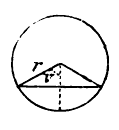


Fig. 206.

Bei einem liegenden Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche (Fig. 206) kann man die Schwimmebene durch den Winkel $2v$ bestimmen, unter welchem die in ihr liegende Sehne eines Querschnitts von der Axe aus gesehen wird. Man erhält dabei

$$\gamma \pi r^2 l = r^2 l (v - \sin v \cos v)$$

oder

$$2v - \sin 2v = 2\gamma\pi. \tag{396}$$

Der Winkel v muss also eine Wurzel dieser transcendenten Gleichung sein. Um die jedesmalige Auflösung der Gleichung zu vermeiden, giebt Rühlmann in seiner Hydromechanik eine Tabelle, welche mit φ als Argument den Wert von $\varphi - \sin \varphi$ enthält.

§ 32.

Das Metacentrum.

Stabilität des Gleichgewichtes.

Stabilität.

Bei der Untersuchung der Stabilität des Gleichgewichtes eines schwimmenden Körpers werde vorausgesetzt, dass der Körper eine zu der Schwimmebene senkrechte Symmetrieebene besitze, welche also den Schwerpunkt und die Schwimmaxe enthält. Man untersucht ferner nur die Stabilität in Bezug auf Drehungen aus der Gleichgewichtslage um eine Axe, welche parallel der Schnittlinie der Schwimmebene und der Symmetrieebene ist.

In der Gleichgewichtslage liegen, wie in § 31 hervorgehoben wurde, die im Körperschwerpunkte S angreifende Schwerkraft G und der im Deplacementschwerpunkte T wirkende hydrostatische Auftrieb R auf der verticalen Schwimmaxe. (Fig 207). Um den Körper um einen

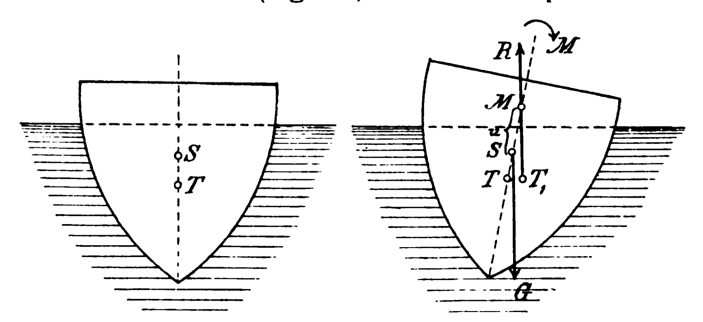


Fig. 207.

kleinen Winkel φ aus der Gleichgewichtslage zu drehen, bedarf es eines kleinen Momentes M in der zur Schwimmebene senkrechten Ebene durch den Schwerpunkt. In der neuen Gleichgewichtslage hält das Kräftepaar M einem Kräftepaare das Gleichgewicht, das aus dem Ge-

wichte G und dem damit gleich grossen hydrostatischen Auftriebe R in dem Schwerpunkte T_1 des neuen Deplacementes besteht. Es wird ausserdem vorausgesetzt, dass T_1 in der durch S geführten Ebene liegt, in welcher M wirkt. Eine Verticale durch T_1 trifft die Schwimmaxe TS in einem Punkte M, dessen Lage, wie unten gezeigt wird, für kleine Drehungen unabhängig von der Grösse der Drehung ist. Man nennt den Punkt M das Metacentrum und erhält jetzt folgende Regel für die Stabilität des Gleichgewichtes:

Metacentrum.

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist stabil, labil oder indifferent, je nachdem das Metacentrum oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes des Körpers liegt oder damit zusammenfällt.

Bezeichnet man mit u den Abstand zwischen dem Schwerpunkte S und dem Metacentrum M und rechnet u positiv, wenn M oberhalb S liegt, so erhält man

$$M = Gu \sin \varphi \tag{397 a}$$

oder, da φ ein sehr kleiner Winkel ist, genügend genau

$$M = Gu\varphi . \tag{397 b}$$

Bestimmung des Metacentrums.

Um den obigen Satz anwenden zu können, muss man die Lage des Metacentrums berechnen. Der schwimmende Körper sei beispielsweise ein Schiff. V bezeichne das Volumen des Deplacementes. Wird der Schiffskörper aus seiner aufrechten Lage um den kleinen Winkel φ gedreht, so hebt sich ein keilförmiges Stück, in der Figur 208 AOF entsprechend, aus dem Wasser, während ein anderes keilförmiges Stück, ODG entsprechend, in das Wasser hineintaucht. Diese beiden Stücke haben dasselbe Volumen v, da das Deplacement unverändert geblieben ist. Ist das drehende Moment M, so hat man wie oben

$$M = Gu\varphi .$$

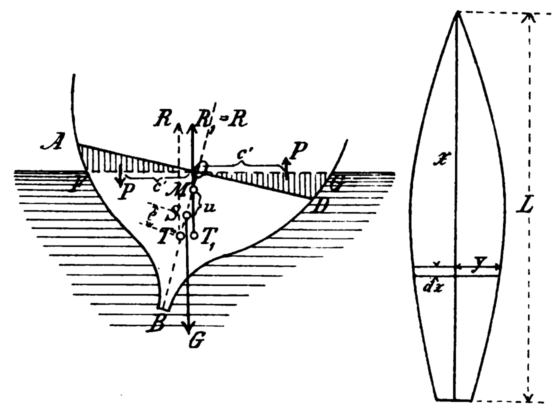


Fig. 208.

Bezeichnet man ferner den Abstand zwischen den Schwerpunkten des Schiffskörpers und des Deplacementes mit e, die horizontale Verschiebung des Angriffspunktes des Auftriebs mit c, so erhält man

$$M = Gu\varphi = G\,(c \mp e\varphi)\,, \tag{398}$$

wo das obere oder untere Zeichen gewählt wird, je nachdem S oberhalb oder unterhalb T liegt. Um c zu berechnen, betrachtet man den Auftrieb $R_1 = \gamma V$ in der geneigten Lage als Resultirende von dem Auftriebe $R = \gamma V$, einer nach oben gerichteten Kraft $P = \gamma v$ in dem Schwerpunkte des eingetauchten Keiles und einer nach unten gerichteten gleich grossen Kraft in dem Schwerpunkte des aus dem Wasser gehoben Keiles. Bezeichnet c' den Abstand der Schwerpunkte der Keile von der verticalen Symmetrieebene des Schiffes, so erhält man mit Hülfe einer Momentengleichung für eine Axe durch T_1 parallel der Längsrichtung

$$Rc = 2Pc'$$

oder

$$cV = 2c'v\,. \tag{399}$$

Die Grösse $c'v$ muss noch berechnet werden. Mit Hülfe zweier benachbarter Verticalebenen, welche senkrecht zur Längsrichtung des Schiffes sind, schneidet man aus dem einen Keil eine Scheibe von der Dicke dx. Ist y die Seitenlänge der Scheibe, so liegt ihr Schwerpunkt im Abstande $\frac{2}{3}y$ von O; sie liefert zu $c'v$ den Beitrag $\frac{2}{3}y \cdot \frac{1}{2}y^2\varphi\, dx = \frac{1}{3}\varphi y^3\, dx$. Man erhält also

$$c'v = \frac{1}{3}\varphi \int_0^L y^3\, dx.$$

Die Grösse

$$J = \frac{2}{3}\int_0^L y^3\, dx$$

ist das Trägheitsmoment der Fläche der sog. Constructions-Wasserlinie (des Durchschnittes in der Schwimmebene), bezogen auf die Mittellinie derselben. Mit Hülfe der Gleichung (399) wird jetzt

$$cV = J\varphi$$

erhalten, und die Gleichung (398) liefert schliesslich

$$u = \frac{J}{V} \mp e. \tag{400}$$

Nach dieser Gleichung ist die Höhe u des Metacentrums oberhalb des Schwerpunktes, die sog. metacentrische Höhe, unabhängig von dem Drehungswinkel φ, wenn φ klein bleibt (siehe p. 288 oben). Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (400) stellt den Abstand zwischen dem Metacentrum und dem Deplacements-Schwerpunkte dar. Man benützt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem S oberhalb oder unterhalb T liegt. Die Beschaffenheit des Gleichgewichts hängt vom Vorzeihen der metacentrischen Höhe u ab, und zwar ergiebt sich die Regel:

Das Gleichgewicht ist stabil, wenn der Schwerpunkt des Körpers unterhalb des Schwerpunktes des Deplacementes liegt; im entgegengesetzten Falle ist das Gleichgewicht stabil, labil oder indifferent, je nachdem der Quotient aus dem Trägheitsmomente des Durchschnittes in der Schwimmebene durch das Volumen des Deplacementes grösser, kleiner oder gleich dem Abstande zwischen den Schwerpunkten des Körpers und des Deplacementes ist.

Die Grösse der metacentrischen Höhe u giebt ein Mass für die Stabilität ab.

Ist der Körper prismatisch und der Durchschnitt in der Schwimmebene folglich ein Rechteck, dessen Länge L und dessen Breite $2b$ sei, so erhält man

$$J = \tfrac{2}{3}\, b^3 L$$

und

$$V = LF,$$

wo F der zu den Kanten des Prismas senkrechte Querschnitt ist, und die Gleichung (400) liefert

$$u = \tfrac{2}{3}\frac{b^3}{F} \mp e. \tag{401}$$

Die metacentrische Höhe eines auf dem Wasser liegenden Schiffes kann auch experimentell ermittelt werden. Das Schiff wird dadurch etwas aus der aufrechten Lage gedreht, dass eine Last Q um das Stück a quer zur Längsrichtung verschoben wird. Ist der dabei beobachtete Neigungswinkel φ und bezeichnet G das bekannte Deplacement des Schiffes, so erhält man

$$Gu\,\varphi = Qa,$$

also die metacentrische Höhe

$$u = \frac{Qa}{G\varphi}. \tag{402}$$

Wenn u gefunden ist, so kann man nötigenfalls den Abstand zwischen den Schwerpunkten des Schiffskörpers und des Deplacementes mit Hülfe der Gleichung

$$e = \frac{J}{V} - u$$

berechnen.

Anwendungen.

1) Bei einem prismatischen Holzbalken mit rechteckigem Querschnitt ergeben sich mit den Bezeichnungen in den Figuren 209 zur Bestimmung der Stabilität die Gleichungen

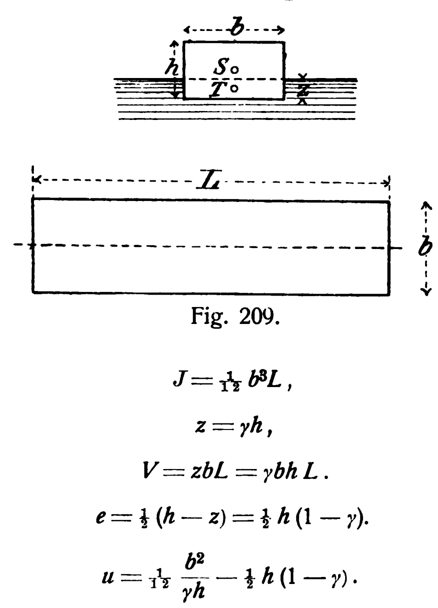


Fig. 209.

$$J = \tfrac{1}{12} b^3 L,$$

$$z = \gamma h,$$

$$V = zbL = \gamma bh L.$$

$$e = \tfrac{1}{2}(h - z) = \tfrac{1}{2} h (1 - \gamma).$$

$$u = \tfrac{1}{12} \frac{b^2}{\gamma h} - \tfrac{1}{2} h (1 - \gamma).$$

Das Gleichgewicht ist stabil, wenn

$$\frac{b}{h} > \sqrt{6\gamma (1 - \gamma)}$$

ist und labil, wenn

$$\frac{b}{h} < \sqrt{6\gamma (1 - \gamma)}$$

ist. In dem letzteren Falle dreht sich der Balken um 90° und nimmt eine stabile Gleichgewichtslage ein. Beispielsweise ergiebt sich für $\gamma = \frac{1}{2}$

$$\frac{b}{h} \gtrless \sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1.225.$$

2) Bei einem Balken mit quadratischem Querschnitt sollen die zwischen 0 und 1 liegenden Grenzen des specifischen Gewichtes ermittelt werden, welche die stabilen Gleichgewichtslagen bestimmen.

Die obigen Gleichungen liefern für $b = h = s$ als Bedingung des stabilen Gleichgewichtes

$$1 > \sqrt{6\gamma(1-\gamma)}$$

oder

$$\gamma(1-\gamma) < \tfrac{1}{6}.$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn γ zwischen 0 und $\frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{1}{3}}) = 0.2113$ oder zwischen $\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{3}}) = 0.7887$ und 1 liegt. Befindet sich γ zwischen 0.2113 und 0.7887, so ist das Gleichgewicht labil.

§ 33.

Relatives Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

Relatives Gleichgewicht.

Wenn eine Flüssigkeit in Ruhe innerhalb eines Gefässes bleibt, welches eine Bewegung besitzt, so befindet sich die Flüssigkeit im relativen Gleichgewichte. Den Fall, in welchem die Bewegung des Gefässes translatorisch, geradlinig und gleichförmig ist, braucht man nicht zu betrachten, da die Bedingungen des absoluten und des relativen Gleichgewichts dann dieselben sind. Hat das Gefäss eine andere Bewegung, so fügt man bei der Bestimmung des relativen Gleichgewichtes zu den äusseren Kräften, welche auf die Masse der Flüssigkeit wirken (wie z. B. die Schwere) die Trägheitswiderstände in der Bewegung des Gefässes hinzu (siehe § 44 und 110, I). Die wichtigsten Aufgaben betreffend das relative Gleichgewicht sind die Bestimmung des Druckes in der Flüssigkeit und der Form der freien Oberfläche.

Translatorische geradlinige Bewegung.

Der einfachste Fall des relativen Gleichgewichtes findet statt, wenn die Bewegung des Gefässes ***translatorisch und geradlinig, aber gleichförmig veränderlich*** mit einer constanten Beschleunigung a ist, die einen Winkel β mit der Horizontalebene einschliesst (Fig. 210). Wählt man die x-Axe horizontal, die z-Axe vertical und nach unten gerichtet und die xz-Ebene parallel der Beschleunigung a, so hat man in der Differentialgleichung (365) für den Flüssigkeitsdruck die Werte

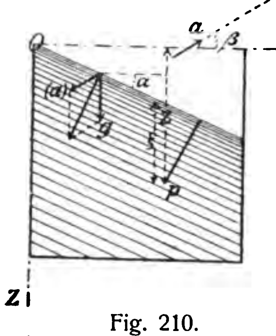


Fig. 210.

$$X = -a\cos\beta,$$

$$Y = 0,$$

$$Z = g + a\sin\beta$$

einzusetzen. Dabei ergiebt sich

$$dp = -\frac{\gamma}{g}a\cos\beta\,dx + \gamma\left(1 + \frac{a}{g}\sin\beta\right)dz$$

und durch Integration folgt

$$(403)\qquad p = -\frac{\gamma}{g}a\cos\beta\,.\,x + \gamma\left(1 + \frac{a}{g}\sin\beta\right)z + p_0.$$

Liegt der Anfangspunkt der Coordinaten wie in Fig. 210 in dem Flüssigkeitsspiegel, so erhält man die Gleichung desselben für $p = p_0$ und zwar in der Form

$$(404)\qquad -\frac{a}{g}\cos\beta\,.\,x + \left(1 + \frac{a}{g}\sin\beta\right)z = 0;$$

dieser Spiegel ist eine durch die y-Axe gehende Ebene, welche mit der x-Axe einen durch die Gleichung

$$(405)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\cos\beta}{g + a\sin\beta}$$

bestimmten Winkel einschliesst. *Die Niveauflächen des Druckes sind der freien Oberfläche parallele Ebenen.* Man bezeichne mit ζ den in verticaler Richtung gemessenen Abstand eines Punktes innerhalb der Flüssigkeit von der freien Oberfläche; für den specifischen Druck in diesem Punkte findet man dann statt (403) den einfacheren Ausdruck

$$p = \gamma \left(1 + \frac{a}{g} \sin \beta\right) \zeta + p_0. \tag{406}$$

Die Resultirende aus g und (a) steht senkrecht auf den Niveauflächen.

Man beachte folgende specielle Fälle:

$$\beta = 0, \qquad \text{giebt } p = \gamma \zeta + p_0.$$

$$\beta = +90^\circ \text{ giebt } p = \gamma \left(1 + \frac{a}{g}\right) z + p_0.$$

$$\beta = -90^\circ \text{ giebt } p = \gamma \left(1 - \frac{a}{g}\right) z + p_0.$$

In den beiden letzten Fällen sind die freie Oberfläche und die Niveauflächen horizontal. Wählt man in dem letzten Falle $a = g$, so ist der specifische Druck innerhalb der Flüssigkeit constant und gleich p_0.

Wenn das Gefäss sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine verticale Axe dreht, so sind die Trägheitswiderstände identisch mit den Centrifugalkräften (Fig. 211). Wählt man die Rotationsaxe als z-Axe, so hat man in der Gleichung (365)

$$X = \omega^2 x,$$

$$Y = \omega^2 y,$$

$$Z = g$$

einzuführen. Dabei erhält man

$$dp = \gamma \left\{ \frac{\omega^2}{g} (xdx + ydy) + dz \right\}$$

und die Integration ergiebt

$$p = \gamma \left\{ \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + z \right\} + p_0. \tag{407}$$

Wie diese Gleichung zeigt, *sind die Niveauflächen Umdrehungsparaboloide mit der Drehaxe als Axe und von constantem Parameter.* Speciell gilt dies auch von der freien Oberfläche.

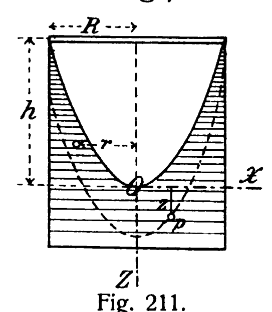


Fig. 211.

Die lineare Geschwindigkeit eines Punktes in dem Abstande

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

von der Umdrehungsaxe ist

$$u = \omega r.$$

Nach (407) ist der specifische Druck in diesem Punkte

$$p = \gamma \left(\frac{u^2}{2g} + z \right) + p_0. \tag{408}$$

Ist das Gefäss ein Cylinder vom Radius R und bezeichnet man mit h den Höhenunterschied zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkte der freien Oberfläche, so erhält man

$$p_0 = \gamma \left(\frac{\omega^2 R^2}{2g} - h \right) + p_0$$

oder

$$h = \frac{(\omega R)^2}{2g}, \tag{409}$$

d. h. *der Höhenunterschied zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkte der freien Oberfläche ist gleich der*

Geschwindigkeitshöhe für die Punkte an der Gefässwandung.

Schliesslich werde noch der Fall betrachtet, dass *das Gefäss sich gleichförmig um eine horizontale Axe dreht,* obgleich es sich dabei um kein eigentliches bleibendes relatives Gleichgewicht handelt.

Ist die Drehaxe die y-Axe und die Winkelgeschwindigkeit ω, so hat man

$$X = \omega^2 x,$$

$$Y = 0,$$

$$Z = \omega^2 z + g$$

und erhält aus der Gleichung (365)

$$dp = \gamma \left\{ \frac{\omega^2}{g} (x dx + z dz) + dz \right\}.$$

Eine Integration liefert

$$p = \gamma \left\{ \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + z^2) + z \right\} + p_0. \tag{410}$$

Die Niveauflächen sind coxiale Cylinder mit der Gleichung

$$x^2 + \left(z + \frac{g}{\omega^2} \right)^2 = \tag{411}$$

$$= \text{Const.} = a^2;$$

die Axe eines Cylinders liegt in der yz-Ebene, ist parallel der y-Axe und befindet sich in der Höhe $\frac{g}{\omega^2}$ oberhalb derselben. Speciell ist die freie Oberfläche ein Cylinder mit dem Radius

$$a = \frac{g}{\omega^2}.$$

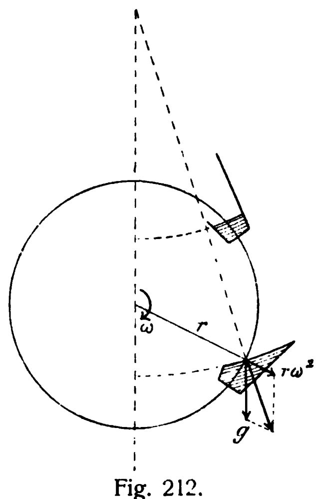


Fig. 212.

Diese Resultate finden Anwendung bei den oberschlächtigen Wasserrädern (Fig. 212). Die Wasserspiegel in den einzelnen Schaufeln sind cylindrisch und das Wasser beginnt von der Schaufel abzufliessen, wenn die freie Oberfläche durch die Aussenkanten der Schaufel geht.

§ 34.

Übungsaufgaben zur Hydrostatik.

1) Bei einer hydraulischen Presse, deren Wirkungsgrad 0.65 ist, hat der Presskolben den Durchmesser 12 cm und der Pumpenkolben den Durchmesser 1.5 cm. Die Hebelarme der Pumpenstange sind 50 cm und 5 cm. Man berechne die Hebekraft.

2) Wie gross ist der specifische Druck im Meer in 10 m Tiefe und in 100 m Tiefe?

3) Man berechne den Druck und dessen Mittelpunkt bei einem Paralleltrapez in einer Verticalebene, wenn die beiden Grundlinien horizontal sind.

4) Man bestimme den Druck und den Druckmittelpunkt bei einer Ellipsenfläche in einer geneigten Ebene, wenn die grössere Axe der Ellipse horizontal ist.

5) Wie findet man den Druck und den Druckmittelpunkt bei einer ebenen verticalen Fläche, welche von beiden Seiten dem Wasserdrucke ausgesetzt ist, wenn der Höhenunterschied der Wasserspiegel auf beiden Seiten bekannt ist?

6) Ein rechteckiger Schieber von 1.2 m Breite und 1 m Höhe ist von der einen Seite dem Hochwasser ausgesetzt, dessen Spiegel 2.5 m über dem Mittelpunkte des Schiebers liegt; von der anderen Seite erleidet er zeitweise den Druck eines Hochwassers, das bis zur oberen Kante des Schiebers reicht, während das Niederwasser sich nur bis zur unteren Kante erstreckt. Man berechne den Druck gegen den Schieber in beiden Fällen.

7) Wie gross ist die Tragkraft eines Leibgürtels, der mit Kork gefüllt ist, wenn der innere Durchmesser 50 cm beträgt und der Durchschnitt des Gürtels eine Ellipse mit 16 und 10 cm langen Axen ist? Das specifische Gewicht des Korks ist gleich 0.24.

8) Man bestimme die Schwimmebene eines liegendes Prismas, dessen Durchschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist.

9) Man untersuche die Stabilität eines Balkens mit quadratischem Querschnitt, wenn das Quadrat auf die Kante gestellt ist.

10) Man berechne die metacentrische Höhe einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche bei Drehungen um die Symmetrieaxen der Schwimmebene, und zwar sowohl für die Spitze nach unten als auch nach oben.

Neunter Abschnitt.

Hydrodynamik.

§ 35.

Allgemeine Bewegungsgleichungen.

In der Hydrodynamik sind die theoretischen Resultate im Gegensatz zur Hydrostatik nicht stets in voller Übereinstimmung mit der Wirklichkeit. Oft kann man sie erst dann praktisch verwerten, nachdem sie durch Hinzufügung empirischer Coefficienten corrigirt worden sind. Die Ursachen dieser Nichtübereinstimmung liegen nicht in der mathematischen Behandlung der Aufgaben, sondern hauptsächlich in der Annahme, dass die Flüssigkeiten vollkommene Flüssigkeiten seien (siehe p. 261). Andererseits ist unsere Kenntnis der Eigenschaften der wirklichen Flüssigkeiten noch zu unvollständig um einer ausreichenden theoretischen Behandlung derselben zu Grunde gelegt werden zu können. Für die Hydrodynamik hat die experimentelle Forschung deshalb fortwährend eine wesentliche Bedeutung.

Aufgaben.

In der technischen Hydrodynamik werden hauptsächlich folgende drei Aufgaben behandelt:

1) das Ausströmen der Flüssigkeiten durch Öffnungen in Gefässwandungen,

2) die Bewegung der Flüssigkeiten in Canälen und Röhrenleitungen,

3) die Wirkung der Flüssigkeiten beim Stoss.

Diese Aufgaben werden unten in der angeführten Reihenfolge näher behandelt. Zuerst mögen aber die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten aufgestellt werden.

Eulers Gleichungen.

Im allgemeinen lässt sich die Bewegung der Flüssigkeiten nicht in der Weise behandeln, dass man die Bewegung eines gegebenen Flüssigkeitselementes zu verfolgen sucht, sondern man begnügt sich für jeden Punkt innerhalb der Flüssigkeit und für jede Zeit die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsströmung und den Druck zu ermitteln. Es sollen die hierauf sich beziehenden sog. Euler'schen Differentialgleichungen jetzt abgeleitet werden.

Die Coordinaten eines Punktes innerhalb der Flüssigkeit in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume seien x, y und z, die Componenten der Geschwindigkeit der Strömung in dem Punkte parallel den Coordinatenaxen u, v und w, die Componenten der auf die Masseneinheit im Punkte wirkenden äusseren Kraft X, Y und Z. Endlich sei p der specifische Druck im Punkte und γ das specifische Gewicht der Flüssigkeit. Man wähle in dem betrachteten Punkte ein kleines parallelepipedisches Massenelement mit den Kanten dx, dy und dz (Fig. 213). Dieses Element hat

die Masse $\frac{\gamma}{g} dxdydz$;

die Componente parallel der x-Axe der auf dasselbe wirkenden äusseren Kraft ist

$$\frac{\gamma}{g} X\,dx\,dy\,dz.$$

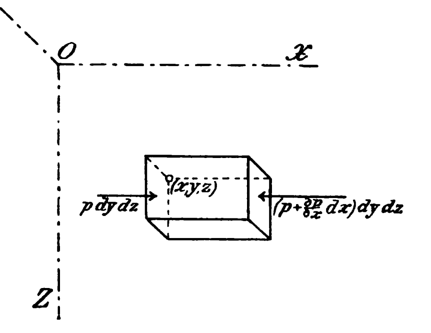


Fig. 213.

Auf die Seitenflächen des Elementes wirken Drücke, die in der Richtung der x-Axe die Resultirende

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

liefern. Diese Kräfte erteilen dem Elemente in der Richtung der x-Axe die Beschleunigung $\frac{du}{dt}$; man erhält also die Bewegungsgleichung

$$\frac{\gamma}{g} dx\, dy\, dz \frac{du}{dt} = \frac{\gamma}{g} X\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz,$$

und mit Hinzufügung der zwei ähnlichen Gleichungen für die beiden anderen Axen ergiebt sich das System

$$(412)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g}\left(X - \frac{du}{dt}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g}\left(Y - \frac{dv}{dt}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g}\left(Z - \frac{dw}{dt}\right). \end{aligned}$$

Die Grössen u, v und w sind im allgemeinen Functionen der Coordinaten x, y, z und der Zeit t. Mit Anwendung der Formeln

$$u = \frac{dx}{dt}, \; v = \frac{dy}{dt}, \; w = \frac{dz}{dt}$$

erhält man deshalb

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

und die Eulerschen Differentialgleichungen nehmen die Form an:

$$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}=X-\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z},$$

(413)
$$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}=Y-\frac{\partial v}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}=Z-\frac{\partial w}{\partial t}-u\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Continuitätsgleichung.

Zu diesen drei Gleichungen mit den vier Unbekannten u, v, w und p kommt noch eine vierte Gleichung, die sog. Continuitätsgleichung. Man betrachte das Volumenelement $dx\,dy\,dz$ zu den Zeiten t und $t+dt$. Während der Zeit dt verschiebt sich die der yz-Ebene parallele Seite durch den Punkt (x, y, z) in der Richtung der x-Axe um das Stück udt und die parallel der gleichen Coordinatenebene durch den Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz)$ gelegte Seite in derselben Richtung um das Stück $(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx)\,dt$. Bei dem neuen Parallelepiped ist die Länge der der x-Axe parallelen Kante somit

$$dx-udt+(u+\frac{\partial u}{dx}dx)\,dt=dx\,(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt).$$

Ähnliche Ausdrücke erhält man für die beiden anderen Kantenlängen. Da die Änderungen der Winkel zwischen den Seitenflächen keinen Einfluss auf das Volumen haben, so ist das Volumen des Parallelepipeds zur Zeit $t+dt$

$$dx\,dy\,dz\,(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt)(1+\frac{\partial v}{\partial y}dt)(1+\frac{\partial w}{\partial z}dt)=$$

$$=dx\,dy\,dz\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt\right\}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist und dass der Zusammenhang während der Bewegung nirgends aufhört; das neue Volumen

muss dann gleich dem ursprünglichen sein, und man erhält daraus die gesuchte Continuitätsgleichung nicht zusammendrückbarer Flüssigkeiten

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{414}$$

Permanente Bewegung. Der Bewegungszustand kann mit der Zeit veränderlich oder nicht veränderlich sein. Im letzteren Falle, der in der Praxis am häufigsten vorkommt, heisst die Bewegung permanent oder stationär. Analytisch wird er dadurch charakterisirt, dass die Geschwindigkeitscomponenten und der Druck nur von dem Orte des Punktes abhängen, nicht aber von der Zeit, d. h. dass man

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0, \frac{\partial v}{\partial t}=0, \frac{\partial w}{\partial t}=0 \text{ und } \frac{\partial p}{\partial t}=0$$

hat. Die Euler'schen Differentialgleichungen der Bewegung werden dann:

$$\begin{aligned} \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} &= X-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z-u\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \tag{415}$$

Führt man hier wieder

$$u=\frac{dx}{dt}, v=\frac{dy}{dt}, w=\frac{dz}{dt}$$

ein, so ergiebt sich das System

$$\begin{aligned} \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} &= X-\frac{du}{dt}, \\ \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y-\frac{dv}{dt}, \\ \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z-\frac{dw}{dt}, \end{aligned} \tag{416}$$

von derselben Form wie das System (412), aber mit einer etwas veränderten Bedeutung der Derivirten der Geschwindigkeitscomponenten.

Satz der lebendigen Kraft.

Man multiplicire die Gleichungen (416) der Reihe nach mit dx, dy, dz und addire sie; dabei ergiebt sich

$$\frac{g}{\gamma}\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - (u\,du + v\,dv + w\,dw)$$

oder

$$(417)\quad \frac{1}{2g}\,d\,(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{g}\Big(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\Big) - \frac{dp}{\gamma}.$$

In dieser Gleichung ist $u^2 + v^2 + w^2$ das Quadrat der Geschwindigkeit. Der Einfachheit wegen bezeichne man künftig die Geschwindigkeit durch u. Die Grösse $\frac{1}{2g}\,d(u^2)$ stellt dann die Änderung der kinetischen Energie (oder halben lebendigen Kraft) pro Gewichtseinheit (1 kg) bei der Bewegung der Flüssigkeit von dem Punkte (x, y, z) nach dem Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$ dar. Ferner ist

$$(418)\qquad dA = \frac{1}{g}\Big(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\Big)$$

die (elementare) Arbeit in der Zeit dt der auf die Masse der Flüssigkeit wirkenden äusseren Kräfte, gerechnet pro Gewichtseinheit. Mit den jetzt eingeführten Bezeichnungen liefert die Gleichung (417)

$$(419)\qquad \frac{d(u^2)}{2g} = dA - \frac{dp}{\gamma}$$

als Ausdruck des Satzes von der lebendigen Kraft bei der permanenten Bewegung der Flüssigkeiten.

§ 36.

Ausflussgeschwindigkeit.

Wenn die in einem Gefäss eingeschlossene Wassermenge durch geregelten Zufluss unveränderlich erhalten

wird, während das Wasser durch eine Öffnung in der Wand oder im Boden des Gefässes ausströmt (Fig. 214), so ist die Bewegung eine permanente und die Gleichung (419) kann angewendet werden. Es wird vorausgesetzt, die Öffnung sei so klein, dass die Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten eines Querschnittes des Flüssigkeitsstrahles durch eine mittlere Geschwindigkeit ersetzt werden können. Ferner werde angenommen, dass alle Flüssigkeitsteilchen, welche sich in einem bestimmten Augenblicke in einer horizontalen Schicht befinden, gleichzeitig nach einer tiefer liegenden horizontalen Schicht gelangen. Der Inhalt der freien Oberfläche sei F_0, derjenige eines beliebigen horizontalen Durchschnittes F; ferner seien u_0 und u die entsprechenden Strömungsgeschwindigkeiten.

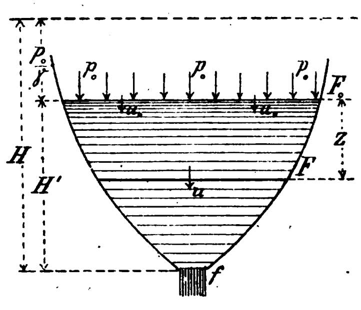


Fig. 214.

Die Continuitätsgleichung (414) kann in dem jetzt betrachteten Falle durch die einfache Gleichung

$$Fu = F_0 u_0 \tag{420}$$

ersetzt werden; sie giebt an, dass in derselben Zeit gleich grosse Wassermengen durch alle horizontalen Schnitte strömen.

Ausfluss-geschwindigkeit.

Bezeichnet man den specifischen Druck in der Fläche F_0 mit p_0, in der Fläche F mit p, den Höhenunterschied zwischen diesen Ebenen mit z, so erhält man, wenn die Schwere die einzige äussere Kraft ist,

$$dA = dz$$

und die Gleichung (419) liefert bei Integration von der Schicht F_0 bis zu der Schicht F

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = z - \frac{p}{\gamma} + \frac{p_0}{\gamma}. \tag{421}$$

Ausflussgeschwindigkeit.

Für die Öffnung, deren Flächeninhalt f sei und in welcher die Geschwindigkeit mit u bezeichnet werde, hat man, wenn das Wasser frei ausströmt, $z = H'$ und $p =$ dem Atmosphärendrucke einzusetzen. Ist p_0 auch gleich dem Atmosphärendrucke, wie es oft der Fall ist, so ergiebt sich zur Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit die Gleichung

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = H'; \tag{422}$$

nach dieser Gleichung ist *die Differenz zwischen den Geschwindigkeitshöhen für die Geschwindigkeit in der Ausflussöffnung und in der freien Oberfläche gleich dem Höhenunterschiede ihrer Ebenen.*

Wenn p_0 nicht gleich dem Atmosphärendrucke ist, werde darunter der specifische Druck auf der freien Oberfläche, nach Abzug des Atmosphärendruckes verstanden; man erhält dann

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = H' + \frac{p_0}{\gamma}. \tag{423}$$

Hier bezeichnet $H' + \frac{p_0}{\gamma}$ die Tiefe der Öffnung unter einem Nullniveau in der Höhe $\frac{p_0}{\gamma}$ oberhalb der freien Oberfläche (vergl. p. 271). Diese Grösse

$$H = H' + \frac{p_0}{\gamma} \tag{424}$$

heisst effective Druckhöhe; man hat also

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = H, \tag{425}$$

d. h. *die effective Druckhöhe ist gleich dem Unterschiede der Geschwindigkeitshöhen in der Öffnung und in der freien Oberfläche.*

Wendet man die Gleichung (420) auf die Ausflussöffnung an, so erhält man

$$fu = F_0 u_0. \tag{426}$$

Wird der hieraus folgende Wert von u_0 in die Gleichung (425) eingesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{u^2}{2g}\left(1-\frac{f^2}{F^2}\right)=H,$$

und die Ausflussgeschwindigkeit wird

$$u=\sqrt{\frac{2g\,H}{1-\frac{f^2}{F_0^2}}}. \tag{427}$$

Gesetz von Toricelli.

Da F_0 gross im Verhältnis zu f ist, kann $\frac{f^2}{F_0^2}$ vernachlässigt werden; es entsteht dann die einfachere Gleichung

$$u=\sqrt{2g\,H}. \tag{428}$$

Unter der Voraussetzung, dass $p_0=0$ ist, enthält sie das Gesetz von Toricelli: *Die Ausflussgeschwindigkeit stimmt mit der Geschwindigkeit überein, welche ein Punkt erreicht, der ohne Anfangsgeschwindigkeit von der freien Oberfläche bis nach der Öffnung fällt.*

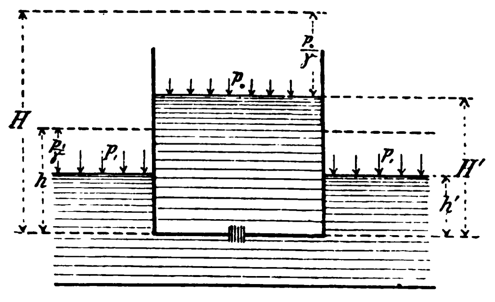


Fig. 215.

Ausfluss unter Wasser.

Der Ausfluss möge jetzt nicht frei, sondern unter Wasser in einem Gefäss vorsichgehen (Fig. 215), wobei die untere Wasserfläche in einer unveränderlichen Höhe h' oberhalb der Öffnung bleibt und dem specifischen Drucke p_1 ausgesetzt ist; man führe dann die Tiefe

$$h = h' + \frac{p_1}{\gamma}$$

der Öffnung unter einem entsprechenden Nullniveau ein und ersetze in der Gleichung (421) $z + \frac{p_0}{\gamma}$ durch H sowie p durch $p_1 + h'\gamma = h\gamma$; dabei ergiebt sich

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = H - h. \tag{429}$$

Die rechte Seite stellt den Höhenunterschied der beiden Nullniveaus dar $(H > h)$; er ist jetzt die effective Druckhöhe. Die Ausflussgeschwindigkeit hat den Wert

$$u = \sqrt{u_0^2 + 2g(H-h)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 - \frac{f^2}{F_0^2}}} \tag{430}$$

oder annähernd

$$u = \sqrt{2g(H-h)}. \tag{431}$$

§ 37.

Erfahrungsresultate in Bezug auf den Ausfluss der Flüssigkeiten.

Geschwindigkeitscoefficient.

Die in § 36 erhaltenen Ausdrücke der Ausflussgeschwindigkeiten für kleine Mündungen stimmen nicht vollkommen mit der Erfahrung überein. Dies rührt von der Reibung in der Flüssigkeit und an den Gefässwand-

ungen sowie davon her, dass die gemachten Voraussetzungen über die Bewegungen der Schichten nicht genau erfüllt sind. Für praktische Zwecke wendet man deshalb statt der Gleichungen (428) und (431) die Gleichungen

$$u = \varphi \sqrt{2gH}, \tag{432}$$

und

$$u = \varphi \sqrt{2g(H-h)} \tag{433}$$

an, wo φ eine empirisch zu bestimmende Constante, den sog. G e s c h w i n d i g k e i t s c o e f f i c i e n t e n bezeichnet. Der Wert von φ ist nur wenig kleiner als 1; also ist die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit etwas kleiner als die theoretische.

Bestimmung von φ.

Bei der Bestimmung von φ kann man nach W e i s b a c h folgendes Verfahren anwenden. Man lässt das Wasser durch eine kleine Öffnung in einer verticalen Wand ausströmen. Jedes Wasserteilchen bewegt sich dabei auf einer Parabel, deren Scheitel T sich in der Öffnung befindet, wo also die Tangente der Parabel horizontal ist (Fig. 216). Man misst die Coordinaten x und y des Punktes A der Parabel, wo sie eine gegebene Horizontalebene trifft. Bezeichnet man mit u die Geschwindigkeit im Scheitel der Parabel, mit t die Zeit der Bewegung von T nach A, so ergiebt sich

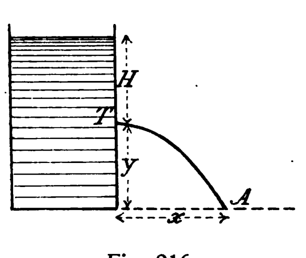


Fig. 216.

$$x = ut, \; y = \tfrac{1}{2} gt^2;$$

man berechnet daraus

$$u = x\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Andererseits ist

$$u = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Hieraus folgt

(434) $$\varphi = \frac{x}{2\sqrt{yH}}.$$

Weisbach erhielt für eine kleine kreisförmige Öffnung in einer dünnen Wand im Mittel $\varphi = 0.96$ bis 0.98. Mit wachsender Druckhöhe nimmt φ ein wenig zu.

Contractions-coefficient.

Um die Ausflussmenge zu berechnen, welche in der Zeiteinheit bei permanenter Bewegung durch eine Öffnung ausströmt, muss man die Ausflussgeschwindigkeit mit der Querschnittsfläche des Strahles multipliciren. Wie die Erfahrung zeigt, ist aber die Querschnittsfläche des Strahles kleiner als die Öffnung. Diese Erscheinung wird Contraction des Strahles genannt und rührt in erster Linie davon her, dass die Flüssigkeitsteilchen zur Öffnung nicht nur in deren Längsrichtung, sondern auch von allen Seiten hinströmen. Das Verhältnis a zwischen der kleinsten Querschnittsfläche des Strahles und der Fläche der Öffnung heisst Contractionscoefficient. Wenn die Fläche der Öffnung f ist und der Strahl frei ausfliesst, so ist also die pro Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge

(435) $$\varphi \sqrt{2gH} \,.\, af = a\varphi f \sqrt{2gH} = \mu f u,$$

wo

(436) $$\mu = a\varphi$$

den sog. Ausflusscoefficienten bezeichnet; er ist gleich dem Verhältnis zwischen der in Wirklichkeit ausströmenden und der theoretischen Flüssigkeitsmenge.

Bestimmung von a.

Bei seinen Experimenten bestimmte Weisbach den Contractionscoefficienten so, dass er den vertical ausfliessenden Wasserstrahl mit einem Ring umgab, der mit vier

Stellschrauben versehen war, die man so einstellte, dass ihre Spitzen den Strahl berührten (Fig. 217); dadurch

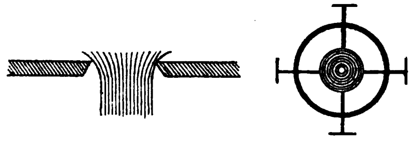


Fig. 217.

konnten die Dimensionen des Strahles gemessen werden. Für eine kreisförmige Öffnung in einer sehr dünnen Wand oder in einer dickeren Wand mit nach innen zugeschärften Kanten der Öffnung ergab sich im Mittel

$$\alpha = 0.64.$$

Daraus wird der Ausflusscoefficient

$$\mu = 0.97 \times 0.64 = 0.62$$

abgeleitet. Es sei *D* der Durchmesser der kreisförmigen Öffnung; der contrahirte Strahl hat dann seinen kleinsten Durchmesser 0.8 *D* etwa in der Entfernung 0.5 *D* von der Öffnung.

Der Contractionscoefficient kann auch indirect dadurch erhalten werden, dass man die Geschwindigkeits- und Ausflusscoefficienten bestimmt. Man findet den Ausflusscoefficienten, wenn man die Wassermenge sammelt und misst, die in einer gewissen Zeit ausgeflossen ist.

Verschiedene Arten von Contraction.

In dem obigen Falle handelte es sich um die sog. vollkommene oder normale Contraction. Sie ist vorhanden, wenn die Öffnung sich in einer grösseren ebenen Wandfläche an einer Stelle befindet, wo keine anderen Wände in der Nähe sind. Die Contraction hängt von einer grossen Anzahl von Umständen ab, die fast nur auf empirischen Wege erforscht werden können; unter diesen mögen die folgenden erwähnt werden:

1) Die Grösse und Form der Öffnung und die Druckhöhe. Im allgemeinen wächst der

Contractionscoefficient ein wenig, wenn die Öffnung kleiner wird und wenn die Druckhöhe zunimmt.

2) Die Beschaffenheit der Gefässwand neben der Öffnung. Die Contraction ist kleiner, wenn die Kanten der Öffnung nach aussen gebogen sind, und grösser, wenn ihre Kanten nach innen gebogen sind. Im ersteren Falle findet sog. verschwächte, im letzteren Falle sog. verstärkte Contraction statt.

3) Die Grösse der Wandfläche im Verhältnis zur Grösse der Öffnung. Wenn die Wandfläche, in welcher die Öffnung sich befindet, nur wenig grösser als die Öffnung ist und sich an zu ihr senkrechten Wänden anschliesst (Fig. 218), so besitzen die Wasserteilchen in der Öffnung eine mit der Längsrichtung des Strahles mehr übereinstimmende Bewegung, als wenn die Wandfläche gross im Verhältnis zur Öffnung ist. Die Contraction ist unter diesen Umständen kleiner als die normale und wird unvollkommene Contraction genannt.

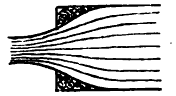


Fig. 218.

4) Wenn sich die Öffnung bis zu einer oder mehreren der Seitenwände erstreckt, so wird die Contraction an diesen aufgehoben; indem die Wasserteilchen sich bei ihrer Ankunft zur Öffnung parallel der Längsrichtung des Strahles bewegen. Die Contraction heisst in diesem Falle eine partielle.

5) Die Contraction hängt auch von der Dicke der Wand und von der Form des (kurzen) Ansatzrohres ab, mit dem die Öffnung möglicherweise versehen ist. Wenn das Ansatzrohr genau nach dem freien Strahl geformt ist, so erhält man $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$, da der Durchschnitt am Ende des Ansatzrohres in diesem Falle als Öffnung betrachtet werden muss. Ein noch weiteres Ansatzrohr kann entweder vollständig oder auch nur teilweise von dem Strahle ausgefüllt werden. Im allgemeinen bewirkt des-

halb ein Ansatzrohr eine Vergrösserung des Contractionscoefficienten.

Der kleinste Wert, den der Ausflusscoefficient μ annimmt, ist ungefähr 0.5 und entspricht einer Öffnung von der in Fig. 219 dargestellten Beschaffenheit.

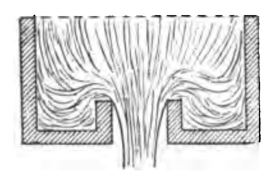


Fig. 219.

Ausser Weisbach haben u. a. Poncelet und Lesbros Versuche über den Ausfluss des Wassers ausgeführt, und zwar hauptsächlich mit rechteckigen Öffnungen.

§ 38.

Ausfluss bei veränderlicher Druckhöhe.

Ein Gefäss sei mit Wasser gefüllt, das durch eine kleine Öffnung im Boden ausströmt, ohne dass ein Zufluss stattfindet (Fig. 220). Dabei nehmen die Druckhöhe und die Ausflussgeschwindigkeit mit der Zeit ab. Man berechne die Zeit, welche verfliesst, während der Wasserspiegel um eine bestimmte Höhe sinkt und speciell die Zeit, während welcher das Gefäss geleert wird.

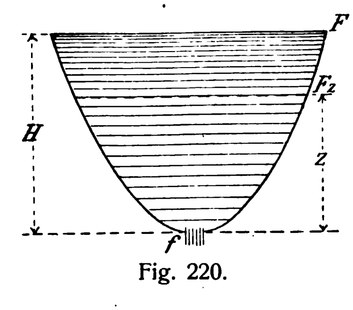


Fig. 220.

Ausflusszeit. Es bezeichne F_z den Durchschnitt des Gefässes in der Höhe z oberhalb der Öffnung, F den Flächeninhalt des Wasserspiegels, H seinen Abstand von der Öffnung. Ferner werde vorausgesetzt, dass der Querschnitt sich nach dem Gesetze

$$F_z = \left(\frac{z}{H}\right)^n F$$

ändere.

Wenn der Wasserspiegel bis zu dem Querschnitte F_z gesunken ist, ist die Druckhöhe z und die in der Zeiteinheit ausfliessende Wassermenge nach der Gleichung (435)

$$\mu f \sqrt{2gz}.$$

Für die Zeit dt erhält man also die Menge

$$\mu f \sqrt{2gz}\, dt.$$

Andererseits sinkt der Wasserspiegel in der Zeit dt um $-dz$ und die Menge $-F_z\, dz$ fliesst aus. Somit folgt

$$-F_z\, dz = \mu f \sqrt{2gz}\, dt$$

und

$$dt = -\frac{1}{\mu f} \frac{F_z}{\sqrt{2gz}}\, dz.$$

Bis der Wasserspiegel von der Höhe H bis zur Höhe h sinkt, vergeht also die Zeit

$$t = \frac{1}{\mu f} \int_h^H \frac{F_z}{\sqrt{2gz}}\, dz \tag{437}$$

und bis das Gefäss sich leert, die Zeit

$$T = \frac{1}{\mu f} \int_0^H \frac{F_z}{\sqrt{2gz}}\, dz. \tag{438}$$

Führt man in diesen allgemeinen Gleichungen

$$F_z = \left(\frac{z}{H}\right)^n F$$

ein, so erhält man

$$(439)\qquad t = \frac{F}{\mu f H^n}\int_h^H \frac{z^n dz}{\sqrt{2gz}} = \frac{F\{H^{n+1/2} - h^{n+1/2}\}}{\mu f\sqrt{2g}\,(n+\frac{1}{2})\,H^n}$$

und

$$(440)\qquad T = \frac{FH}{\mu f\,(n+\frac{1}{2})\,\sqrt{2gH}}.$$

Da der Rauminhalt des Gefässes

$$V = \int_0^H F_z\, dz = \frac{FH}{n+1}$$

ist, so ergiebt sich noch

$$(441)\qquad T = \frac{2n+2}{2n+1}\,\frac{V}{\mu f\sqrt{2gH}}.$$

Anwendungen.

Cylindrisches Gefäss.

1) Bei einem cylindrischen Gefäss (Fig. 221) ist $F_z = F$ und $n = 0$.

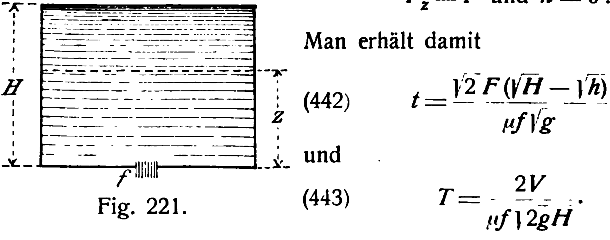


Fig. 221.

Man erhält damit

$$(442)\qquad t = \frac{\sqrt{2}\,F(\sqrt{H} - \sqrt{h})}{\mu f\sqrt{g}}$$

und

$$(443)\qquad T = \frac{2V}{\mu f\sqrt{2gH}}.$$

Dieselbe Wassermenge V würde unter der unveränderlichen Druckhöhe H in der Zeit

$$T' = \frac{V}{\mu f\sqrt{2gH}}$$

ausströmen. T' ist die Hälfte von T.

2) Für ein kegelförmiges Gefäss mit der Spitze nach unten (Fig. 222) ergiebt sich $n = 2$ und

Kegelförmiges Gefäss.

$$T = \frac{2}{5}\frac{FH}{\mu f\sqrt{2gH}} = \frac{6}{5}\frac{V}{\mu f\sqrt{2gH}}. \tag{444}$$

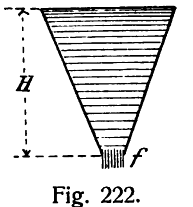


Fig. 222.

3) Wenn das Gefäss ein Umdrehungsparaboloid ist (Fig. 220), so hat man $n = 1$ und

Paraboloidisches Gefäss.

$$T = \frac{2}{3}\frac{FH}{\mu f\sqrt{2gH}} = \frac{4}{3}\frac{V}{\mu f\sqrt{2gH}}. \tag{445}$$

4) Man untersuche, bei welcher Gestalt des Gefässes der Wasserspiegel gleichförmig sinkt.

Gleichförmig sinkender Wasserspiegel.

Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels ist

$$\frac{f}{F_z}u = \frac{f}{F_z}\varphi\sqrt{2gz}.$$

Wenn sie constant bleiben soll, so muss F_z proportional $\sqrt{z}$ sein. Dies findet beispielsweise bei einem Gefäss statt, das die Form eines liegenden Cylinders hat, dessen Durchschnitt mit einer verticalen Ebene eine Parabel ist.

Wenn der Ausfluss aus einem Gefäss mit unveränderlichem Querschnitte F unter Wasser in einem Behälter vorsichgeht, wo das Niveau constant bleibt, so ergiebt sich mit den Bezeichnungen der Fig. 223

Ausfluss unter Wasser.

$$-F\,dz = \mu f\sqrt{2g(z-h)}\,dt,$$

$$dt = -\frac{F}{\mu f}\frac{dz}{\sqrt{2g(z-h)}}.$$

Für die Zeit T, in welcher das Gefäss sich so weit entleert, dass die Flüssigkeitsspiegel innen und aussen in der gleichen Höhe stehen, berechnet man

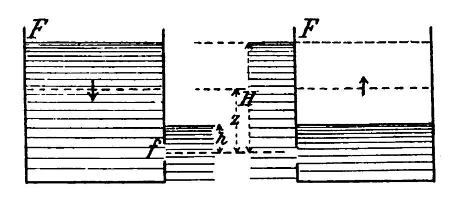


Fig. 223.

$$(446) \qquad T = \frac{F}{\mu f} \int_h^H \frac{dz}{\sqrt{2g(z-h)}} = \frac{2F(H-h)}{\mu f \sqrt{2g(H-h)}}.$$

Dieselbe Zeit vergeht, wenn das Wasser in das Gefäss hineinströmt und der Flüssigkeitsspiegel dabei von der Höhe h bis zu der unveränderlichen Höhe H ausserhalb des Gefässes steigt.

Beispiel. Um eine Schleusenkammer von 12 m Breite und 60 m Länge durch zwei unter dem äusseren Wasserspiegel liegende Öffnungen von 0.8 m Höhe und 1.2 m Breite zu leeren, braucht man bei 4.5 m Höhenunterschied zwischen dem Ober- und Unterwasserspiegel die Zeit ($\mu = 0.6$)

$$T = \frac{2 \,.\, 12 \,.\, 60 \,.\, 4.5}{0.6 \,.\, 2 \,.\, 0.8 \,.\, 1.2 \sqrt{2g \,.\, 4.5}} = 599 \text{ Sec.},$$

also ungefähr 10 Minuten.

§ 39.

Ausfluss durch grössere Öffnungen.

Innerhalb einer Öffnung von nicht allzu kleinen Dimensionen, die in einer verticalen Gefässwand liegend angenommen werde, ändert sich die Druckhöhe von Punkt zu Punkt; die ausfliessende Flüssigkeitsmenge kann dann nicht mehr mit Hülfe der für kleine Öffnungen geltenden Formeln streng berechnet werden. Oft benützt man aber auch in diesem Falle die elementaren Formeln für kleine Öffnungen; man wählt dabei die Druckhöhe im Schwerpunkte der Öffnung und wendet einen zweckmässig bestimmten Ausflusscoefficienten an. Bei einer vollständigeren Berechnung denkt man sich die Öffnung in schmale horizontale Streifen zerlegt. Auf einen derartigen Streifen kann man die elementare Formel anwenden, und nachher durch eine Integration zu der ganzen Öffnung übergehen.

Es werde zunächst eine rechteckige Öffnung (Fig. 224) in Betracht gezogen. Mit den Bezeichnungen der Figur 224 findet man für die Wassermenge, welche in der Zeit-

Rechteckige Öffnung.

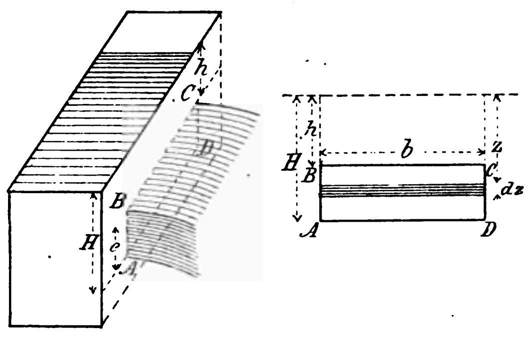


Fig. 224.

einheit durch einen Streifen von der unendlich kleinen Höhe dz ausfliesst, wenn man vorläufig den Ausflusscoëfficienten μ weglässt,

$$dQ' = b\, dz \sqrt{2gz}.$$

Für die ganze Öffnung ergiebt sich dann

$$Q' = b \int_h^H \sqrt{2gz}\, dz = \tfrac{2}{3}\, b \sqrt{2g}\{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\}.$$

Führt man jetzt μ ein, so ist die unter Voraussetzung constanter Druckhöhe in der Zeiteinheit ausströmende Wassermenge

$$Q = \tfrac{2}{3}\, \mu b \sqrt{2g}\, \{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\}. \tag{447}$$

Für den praktischen Gebrauch wird diese Gleichung gewöhnlich durch eine einfachere Gleichung ersetzt. Statt H und h führe man die Druckhöhe

$$\zeta = \frac{H + h}{2}$$

im Schwerpunkte und die Höhe

$$e = H - h$$

des Rechteckes ein. Man erhält dabei

$$H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} = (\zeta + \tfrac{1}{2} e)^{\frac{3}{2}} - (\zeta - \tfrac{1}{2} e)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \zeta^{\frac{1}{2}} e - \frac{1}{64} \zeta^{-\frac{3}{2}} e^3 + \ldots$$

und

$$Q = \mu b e \sqrt{2g\zeta} \left\{ 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{\zeta^2} + \ldots \right\}. \tag{448}$$

Dieselbe Wassermenge würde aus derselben Öffnung mit der mittleren Ausflussgeschwindigkeit

$$\bar{u} = \varphi \sqrt{2g\zeta} \left\{ 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{\zeta^2} + \ldots \right\} \tag{449}$$

ausströmen. Dazu gehört die entsprechende mittlere Druckhöhe

$$\zeta \left\{ 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{\zeta^2} + \ldots . \right\} = \zeta - \frac{1}{48} \frac{e^2}{\zeta} + \ldots . \tag{450}$$

In der Praxis kann gewöhnlich schon das e^2 enthaltende Glied vernachlässigt werden, so dass man einfach

$$Q = \mu b (H - h) \sqrt{2g \frac{H + h}{2}}$$

erhält.

Kreisförmige Öffnung.

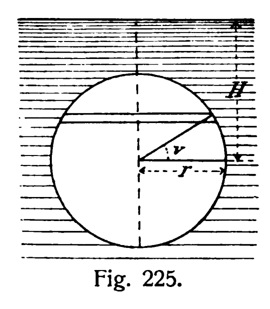


Fig. 225.

Für eine kreisförmige Öffnung (Fig. 225) ergiebt sich in gleicher Weise

$$dQ' = 2r^2 \cos^2 v \, dv \sqrt{2g \{H - r \sin v\}}$$

und

$$Q = 2\mu r^2 \sqrt{2g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \sqrt{H - r \sin v} \, dv .$$

Das hier eingehende Integral ist ein elliptisches. Man erhält durch Reihenentwickelung einen vereinfachten Ausdruck:

$$\sqrt{H - r\sin v} = \sqrt{H}\left\{1 - \frac{r}{H}\sin v\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{H}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{r}{H}\sin v - \frac{1}{8}\frac{r^2}{H^2}\sin^2 v - \frac{1}{16}\frac{r^3}{H^3}\sin^3 v - \frac{5}{128}\frac{r^4}{H^4}\sin^4 v - \ldots\right\}.$$

$$\text{(451)} \qquad Q = \mu\pi r^2\sqrt{2gH}\left\{1 - \frac{1}{32}\frac{r^2}{H^2} - \frac{5}{1024}\frac{r^4}{H^4} - \ldots\right\}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$\text{(452)} \qquad \bar{u} = \varphi\sqrt{2gH}\left\{1 - \frac{1}{32}\frac{r^2}{H^2} - \frac{5}{1024}\frac{r^4}{H^4} - \ldots\right\}$$

und die mittlere Druckhöhe

$$\text{(453)} \qquad H\left\{1 - \frac{1}{16}\frac{r^2}{H^2} - \frac{9}{1024}\frac{r^4}{H^4} - \ldots\right\}.$$

Speciell ergiebt sich für $H = r$, d. h. wenn der Kreis den Flüssigkeitsspiegel berührt,

$$\text{(454)} \qquad Q = \mu\pi r^2\sqrt{2gr}\left\{1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{1024} - \ldots\right\} =$$

$$= 0.964\,\mu\pi r^2\sqrt{2gr}.$$

Vollkommener Überfall.

Wendet man die Gleichung (447) auf eine rechteckige Öffnung an, deren obere Kante im Wasserspiegel liegt (Fig. 226), so erhält man die Dubuatsche Formel für einen Überfall

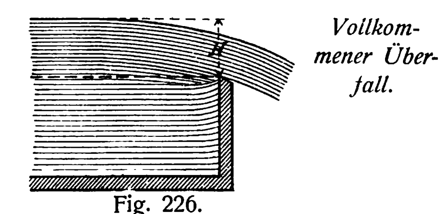


Fig. 226.

$$\text{(455)} \qquad Q = \tfrac{2}{3}\mu bH\sqrt{2gH} = \mu' bH\sqrt{2gH};$$

darin bezeichnet H den Höhenunterschied zwischen der unteren Kante der Mündung und dem Wasserspiegel an

einer Stelle, wo er sich noch nicht gesenkt hat. Der Coefficient μ' hat im Mittel den Wert 0.41.

Unvollkommener Überfall.

Bei einem unvollkommenen Überfall wird kein Wasserstrahl ins Freie geworfen; es findet nur eine Senkung der Wasserfläche statt (Fig. 227). Betrachtet man die Mündung als aus zwei Teilen bestehend, einem unteren von der Höhe h, durch den das Wasser unter der constanten Druckhöhe $H - h$ abfliesst, und einem oberen von der Höhe $H - h$, welcher mit einem vollkommenen Überfall verglichen werden kann, so erhält man

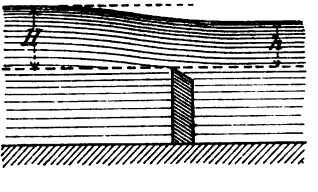


Fig. 227.

$$(456)\quad Q = \tfrac{2}{3}\mu_1 b (H - h)\sqrt{2g(H-h)} + \mu_2 bh\sqrt{2g(H-h)} = \\ = b\left\{\tfrac{2}{3}\mu_1 (H-h) + \mu_2 h\right\}\sqrt{2g(H-h)}.$$

Redtenbacher empfiehlt die Werte $\frac{2}{3}\mu_1 = 0.57$ und $\mu_2 = 0.62$.

§ 40.

Hydraulischer Druck.

Hydraulischer Druck.

Wenn eine Wassermenge innerhalb eines Gefässes in Ruhe ist, so übt sie in jedem Punkte der Gefässwandungen einen gegen die Wand senkrechten Druck, den hydrostatischen Druck aus. Bringt man irgendwo eine Öffnung an, so strömt das Wasser durch die Öffnung aus und gleichzeitig ändert sich der Druck gegen die Gefässwände. Der von der in Bewegung befindlichen Flüssigkeit ausgeübte Druck heisst hydraulischer Druck und muss von dem hydrostatischen Drucke wohl unterschieden werden. Um eine Anschauung von dem hydraulischen Drucke in einem Punkte der Gefässwände zu erhalten, kann man sich an der betreffenden Stelle ein

verticales, oben geschlossenes und luftleeres Rohr eingesetzt denken (Fig. 228). In dieses Rohr steigt eine Wassersäule, deren Höhe die hydraulische Druckhöhe x ist. In der Figur 228 (wo die Bezeichnungen dieselben wie in Fig. 215 sind) wird eine permanente Bewegung des

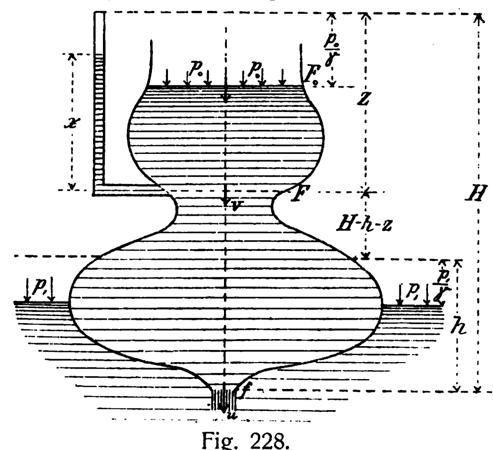


Fig. 228.

Wassers aus einem oberen Gefässe in ein unteres vorausgesetzt. Man will den hydraulischen Druck in einem Querschnitte mit dem Inhalte F und der Geschwindigkeit v ermitteln. Die Gleichung (429) ergiebt

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = H - h.$$

Betrachtet man ferner den Querschnitt F als eine freie Oberfläche, auf die der Druck γx wirkt, so erhält man in der nämlichen Weise

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = H - h - z + x.$$

Daraus ergiebt sich

$$x = z - \frac{v^2 - u_0^2}{2g}, \tag{457}$$

die *hydraulische Druckhöhe in einem Punkte der Gefässwände ist gleich der hydrostatischen Druckhöhe weniger der Differenz zwischen den Geschwindigkeitshöhen, welche der Geschwindigkeit an der betrachteten Stelle und im Flüssigkeitsspiegel entsprechen.*

Man hat ferner

$$F_0 u_0 = Fv = fu$$

und erhält aus (457)

$$x = z - \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{F^2}{F_0^2}\right) = z - \frac{u_0^2}{2g}\left(\frac{F_0^2}{F^2} - 1\right). \tag{458}$$

Die hydraulische Druckhöhe ist also grösser oder kleiner als die hydrostatische Druckhöhe, je nachdem F grösser oder kleiner als F_0 ist. Beide sind nur in solchen Querschnitten gleich gross, wo $F = F_0$ ist.

Die obigen Betrachtungen setzen voraus, dass die Gleichungen nirgends negative Werte des hydraulischen Druckes liefern. In diesem Falle, welcher eine besondere Behandlung erfordert, füllt das Wasser nicht mehr das ganze Gefäss aus, es können Saugwirkungen entstehen u. s. w. (Siehe Rühlmanns Hydromechanik oder A. Ritters technische Mechanik.)

§ 41.

Die Bewegung des Wassers in Rohrleitungen.

Um die Gleichung (419) auf die permanente Bewegung des Wassers in einer Rohrleitung anzuwenden, ändert man sie zweckmässig so ab, dass man dA durch $dA - dB$ ersetzt, wo dA die Arbeit der äusseren Kräfte und $-dB$ die auf die Gewichtseinheit bezogene, stets negative elementare Arbeit der in der Leitung vorkommenden Widerstände bezeichnet. Dabei erhält man

$$\frac{1}{2g} d(u^2) = dA - dB - \frac{dp}{\gamma}. \tag{459}$$

Bewegungswiderstände.

Die Bewegungswiderstände werden in allgemeine und specielle Widerstände eingeteilt. Die allgemeinen Widerstände, welche von der Reibung im Wasser und der Reibung an den Wänden herrühren, wirken auf die ganze Länge der Leitung. Die speciellen Widerstände treten an einzelnen Stellen der Leitung auf und rühren meistens von plötzlichen Veränderungen des Querschnittes oder der Längsrichtung der Leitung her. Dabei entstehen oft wirbelnde Bewegungen des Wassers, welche kinetische Energie verbrauchen.

Die Bewegungswiderstände verursachen eine Verminderung der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser von der Leitung abfliessen würde, wenn sie nicht vorhanden wären. Gewöhnlich vergleicht man die Bewegungswiderstände mit der Schwere und führt sie als sog. Widerstandshöhen ein. Unter Widerstandshöhe einer Rohrleitung wird die Höhe verstanden, um welche 1 kg Wasser sinken müsste, um eine gleich grosse Arbeit wie die Widerstände zu leisten.

In der Gleichung (459) ist B diese Widerstandshöhe. B bezeichnet eine Länge und kann also mit einer Geschwindigkeitshöhe verglichen werden. Zweckmässig setzt man

$$B = \zeta \frac{u^2}{2g}; \tag{460}$$

u ist die Geschwindigkeit, mit der das Wasser die Leitung verlässt und ζ der sog. Widerstandscoefficient der Rohrleitung. Statt Widerstandshöhe wird auch die Benennung Druckhöhenverlust benützt. Wenn H die den Ausfluss verursachende Druckhöhe ist, so ist in der That der Verlust

$$H - \frac{u^2}{2g} = \zeta \frac{u^2}{2g}. \tag{461}$$

In einem geraden cylindrischen Rohr kommt ein specieller Leitungswiderstand beim Eintritt des Wassers in

das Rohr und der allgemeine Leitungswiderstand vor. Man hat deshalb

(462) $$H = \left(1 + \zeta_i + \zeta_r \frac{l}{d}\right) \frac{u^2}{2g},$$

wo ζ_i der Coefficient des speciellen Eintrittswiderstandes, ζ_r der Coefficient der Rohrreibung, l die Länge des Rohres und d sein Durchmesser ist. Im Mittel hat ζ_i den Wert 0.505, kann aber durch Abrundung der Kanten der Mündung bis zu 0.08 heruntergehen. Der Rohrreibungscoefficient ζ_r hängt in gewissem Grade von der Geschwindigkeit u ab. Auf Grund seiner eigenen und der Versuche Anderer hat Weisbach die Formel

(463) $$\zeta_r = 0.01439 + \frac{0.009471}{\sqrt{u}}$$

aufgestellt, wobei die Einheit für u $\frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ ist. Als mittleren Wert nehme man $\zeta_r = 0.02$, etwa der Geschwindigkeit $3 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}$ entsprechend. Die Formel (463) gilt für neue Röhren; wenn die inneren Wände der Leitung mit der Zeit verunreinigt werden, nimmt auch der Rohrwiderstand zu. Ausser der Weisbachschen Formel sind noch andere im Gebrauch, bei denen ζ_r auch von d abhängt.

Führt man statt der Geschwindigkeit u die pro Secunde durch die Leitung strömende Wassermenge Q ein (in m^3, l und d in m), so findet man

(464) $$H = \left(1 + \zeta_i + \zeta_r \frac{l}{d}\right) 0.083 \frac{Q^2}{d^4}.$$

Querschnittsänderungen.

Von den speciellen Rohrwiderständen mögen hier diejenigen betrachtet werden, welche durch plötzliche Querschnittsänderungen und Krümmungen entstehen.

Das Wasser fliesse aus einem weiteren Rohr in ein engeres, wobei vollkommene Contraction stattfinde (Fig. 229).

Die Gleichung (459) ergiebt dabei für die Druckänderung

$$\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - B.$$

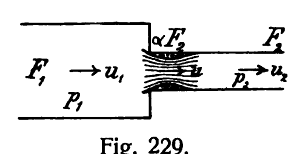


Fig. 229.

Um die Widerstandshöhe B zu berechnen, betrachtet man die Erscheinung als einen unelastischen Stoss und wendet den Carnotschen Satz von dem Verluste der kinetischen Energie an (p. 721, I). Die Flüssigkeitsmasse m erleidet dabei nach dem Eintritt in das Rohr F_2 den Energieverlust

$$\tfrac{1}{2} m (u - u_2)^2 = mg \frac{(u - u_2)^2}{2g};$$

er entspricht dem Druckhöhenverluste

$$B = \frac{(u - u_2)^2}{2g} = \zeta_1 \frac{u_2^2}{2g}.$$

Man hat jetzt

$$\alpha F_2 u = F_2 u_2$$

und

$$\frac{u}{u_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Daraus folgt

$$B = \zeta_1 \frac{u_2^2}{2g} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{u_2^2}{2g}, \tag{465}$$

also

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Mit $\alpha = 0.64$ (p. 312) ergäbe sich $\zeta_1 = 0.316$. In Wirklichkeit muss aber ζ_1 etwas grösser gewählt werden, infolge des Widerstandes beim Eintritt in das engere Rohr. Ge-

schieht der Eintritt aus einem grösseren Behälter, so benützt man den oben angeführten Wert $\zeta_i = \zeta_1 = 0.505$.

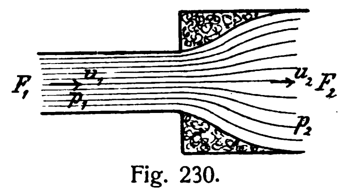


Fig. 230.

Wenn das Wasser aus einem engeren Rohr in ein weiteres Rohr hineinfliesst (Fig. 230), so besteht die Gleichung für die Druckänderung unverändert wie oben; für den Verlust an Druckhöhe ergiebt sich

$$(466) \qquad B = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} = \zeta_1 \frac{u_2^2}{2g} = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 \frac{u_2^2}{2g}.$$

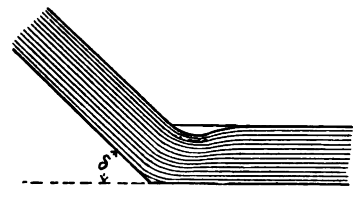


Fig. 231

Wenn F_2 sehr gross im Verhältnis zu F_1 ist, wie z. B. bei einem Rohr, das in einen grösseren Behälter mündet, so geht die Druckhöhe im ganzen verloren.

Krümmungen.

Bei einem Knie, das an dem Rohr angebracht ist (Fig. 231), fand Weisbach den Widerstandscoefficienten

$$(467) \qquad \zeta_2 = 0.9457 \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2.047 \sin^4 \frac{\delta}{2}$$

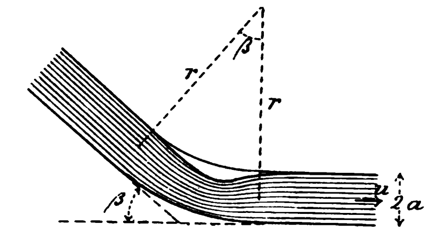


Fig. 232.

und für ein gekrümmtes cylindrisches Rohr (Fig. 232) ergab sich

$$B = \zeta_2 \frac{\beta}{90} \frac{u^2}{2g},$$

$$(468) \qquad \zeta_2 = 0.131 + 1.848 \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{7}{2}},$$

wo β in Graden ausgedrückt werden muss.

In den gewöhnlichen technischen Handbüchern, z. B. in der „Hütte“, finden sich Tabellen, welche die Anwendung dieser Formeln erleichtern.

§ 42.

Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen. Geschwindigkeitsmessungen.

Gebräuchliche Benennungen.

Die Figur 233 stellt ein Stück des Längenprofils eines Canales (oder Flusses) in der Stromrichtung dar. Man nennt den Höhenunterschied $EB = h$ zwischen zwei Punkten A und B der Wasserfläche das G e f ä l l e auf der Strecke $AB = l$. Das Gefälle pro Längeneinheit heisst r e l a t i v e s G e f ä l l e; wenn die Wasserfläche eben ist, hat es den Wert

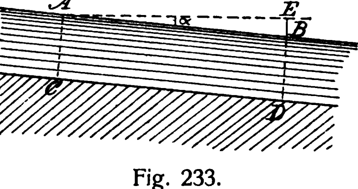


Fig. 233.

(469) $$J = \frac{h}{l}.$$

Schneidet man den Strom durch eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Ebene — praktisch nimmt man eine Verticalebene — so erhält man einen Q u e r s c h n i t t (Q u e r p r o f i l), C a n a l q u e r s c h n i t t oder F l u s s q u e r s c h n i t t. Der Inhalt desjenigen Teiles des Querschnittes, der im Wasser liegt, werde mit F bezeichnet. Die Länge desjenigen Teiles der Begrenzung des Querprofiles, der vom Wasser benetzt wird, heisst W a s s e r p e r i m e t e r oder b e n e t z t e r U m f a n g. In Fig. 234 ist derselbe

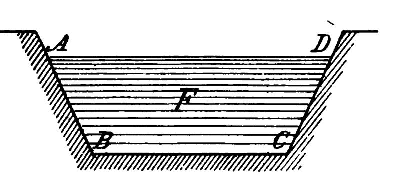


Fig. 234.

$$U = AB + BC + CD.$$

Der Quotient

(470) $$R = \frac{F}{U}$$

wird m i t t l e r e r oder h y d r a u l i s c h e r R a d i u s genannt. Ist der Querschnitt ein Halbkreis (Fig. 235), so erhält man

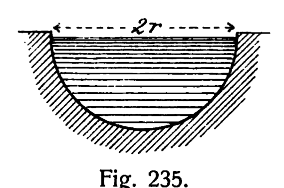


Fig. 235.

$$F = \tfrac{1}{2}\pi r^2;\ U = \pi r;\ R = \tfrac{1}{2} r.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt (Fig. 236) ergiebt sich

$$F = eb;\ U = 2e + b;\ R = \frac{eb}{2e + b};$$

bei grossen Werten von b ist annähernd $R = e =$ der Wassertiefe. Man nennt R deshalb auch die i d e e l e W a s s e r t i e f e.

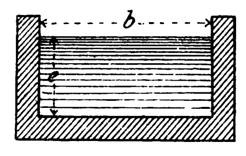


Fig 236.

Bei der Untersuchung der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen ist es von wesentlicher Bedeutung die Geschwindigkeit des strömenden Wassers messen zu können. In § 43 werden einige Apparate beschrieben, welche diesem Zwecke dienen.

Geschwindigkeit im Stromprofil.

Die Geschwindigkeit eines Stromprofiles kann in verschiedenen Punkten verschieden gross sein. Am kleinsten ist die Geschwindigkeit am Boden und an den Seitenwänden, am grössten an der Oberfläche oder nahe unterhalb der Oberfläche und zwar in der Mitte der Flussbreite oder in der Gegend, wo der Strom die grösste Tiefe hat. In irgend einem Punkte ist die Geschwindigkeit gleich der mittleren Geschwindigkeit für das ganze Profil; dieser Punkt ist aber im allgemeinen nicht bekannt. Zum Zwecke der systematischen Untersuchung eines Querprofiles wird es in verticale streifenförmige Elemente

eingeteilt (Fig 237); man misst die Wassertiefen an den Teilungspunkten und erhält dadurch die Form des Profiles. Die Flächeninhalte $F_1, F_2 \dots F_n$ lassen sich dann berechnen, also auch der Inhalt

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

des ganzen Profiles. Mit Hülfe eines zweckmässigen Messinstrumentes ermittelt man mehr oder weniger direct die mittleren Geschwindigkeiten $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ u. s. w. der einzelnen Elemente. Die mittlere Geschwindigkeit für den ganzen Querschnitt ist dann

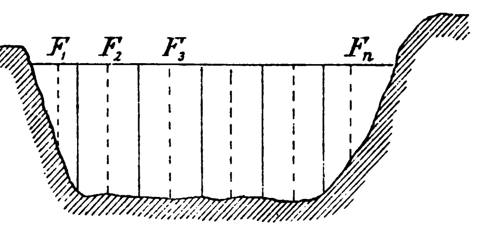


Fig 237.

$$\bar{u} = \frac{F_1 \bar{u}_1 + F_2 \bar{u}_2 + \dots + F_n \bar{u}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \tag{471}$$

und die Wassermenge Q, welche in der Secunde durch das Querprofil fliesst, hat den Wert

$$Q = F\bar{u}. \tag{472}$$

Geschwindigkeiten einer Verticalen.

Auch in den Punkten einer bestimmten Verticalen ist die Geschwindigkeit nicht überall dieselbe und muss deshalb auch in mehreren Punkten gemessen werden. Diese Geschwindigkeiten werden graphisch durch eine Curve veranschaulicht, die nach Humphreys-Abbot eine Parabel mit horizontaler Axe und dem Scheitel unter Wasser ist (Fig. 238). Die Tiefe der

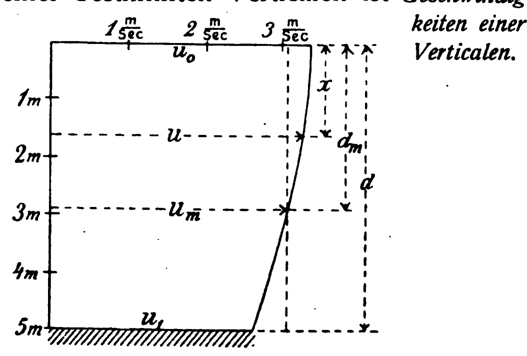


Fig. 238.

Axe der Parabel unter der Wasserfläche ändert sich etwas mit der Windrichtung; sie variirt zwischen 0 und $\frac{1}{3}\,d$. Bei der folgenden Berechnung wird angenommen, dass sie in der Wasserfläche liegt. Man erhält die Tiefe d_m, auf welcher die Geschwindigkeit gleich der mittleren Geschwindigkeit u_m in der betrachteten Verticalen ist, wenn man von der Fläche ein Rechteck abschneidet, dessen Flächeninhalt gleich demjenigen der von der Parabel teilweise begrenzten Figur ist. Die Berechnung kann auf folgende Weise ausgeführt werden. Es ist

$$\frac{u_0 - u}{u_0 - u_1} = \left(\frac{x}{d}\right)^2,$$

$$u = u_0 - \left(\frac{x}{d}\right)^2 (u_0 - u_1).$$

$$u_m \,.\, d = \int_0^d u\, dx = \frac{2u_0 + u_1}{3}\, d.$$

$$u_m = \frac{2u_0 + u_1}{3}.$$

Der Geschwindigkeit u_m entspricht eine Tiefe d_m, für welche

$$\left(\frac{d_m}{d}\right)^2 = \frac{u_0 - u_m}{u_0 - u_1} = \frac{1}{3}$$

und

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{3}}\, d = 0.577\, d \tag{473}$$

erhalten wird. Man würde also die mittlere Geschwindigkeit einer Verticalen durch eine einzige Geschwindigkeitsmessung in der Tiefe $0.58\,d$ unter der Oberfläche finden.

Hier werde noch erwähnt, dass Weisbach die Beziehung

$$u_1 = 0.83\, u_0$$

angiebt, woraus

$$u_m = 0.94\, u_0$$

folgt.

Da die Messung einer grösseren Zahl von Geschwindigkeiten desselben Querprofils beschwerlich und zeitraubend ist, so hat man auch versucht sich mit der Messung einer einzigen Geschwindigkeit, z. B. der grössten Geschwindigkeit zu begnügen, und die mittlere Geschwindigkeit daraus zu berechnen. Ein solches Verfahren kann bei regelmässigen Querprofilen oft mit Vorteil angewandt werden. Zu diesem Zwecke hat Bazin die Formel

$$(474)\qquad \frac{\text{mittlere Geschwindigkeit}}{\text{grösste Geschwindigkeit}} = \frac{1}{1 + 14\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{R}}}$$

aufgestellt, wo α und β zwei von der Beschaffenheit des Canal- oder Strombettes abhängende sog. Rauhigkeitsconstanten sind. In dem Handbuch „Hütte" finden sich auf diese Formel gegründete Tabellen.

§ 43.

Apparate zur Geschwindigkeitsmessung.

Mittlere Geschwindigkeit.

Für die Messung der Geschwindigkeit des strömenden Wassers werden hauptsächlich folgende Apparate angewandt: Einfache Schwimmer, die Pitot-Darcysche Doppelröhre und der hydrometrische Flügel von Woltmann.

Man benützt Schwimmer bei der Bestimmung der Geschwindigkeit an der Oberfläche, wenn man keine der beiden anderen oben genannten Instrumente zur Verfügung hat oder wenn die Geschwindigkeit so gross ist, über 3 $\frac{\text{m}}{\text{Sec}}$, dass ihre Anwendung erschwert wird. Die

Schwimmer können einfache Holzklötze, Holzstäbe mit einem angehängten Stein, der den Stab vertical hält, Glasflaschen u. s. w. sein. Sie werden auf's Wasser geworfen und vom Strom mitgerissen; man beobachtet dann die Zeit, in welcher ein Stück von bekannter Länge durchlaufen wird. Die Anwendung der Schwimmer setzt voraus, dass die Geschwindigkeit des Wassers auf der ganzen durchflossenen Strecke nahezu unveränderlich ist.

Stab von Cabeo.

Auch Tiefschwimmer wie der Stab von Cabeo, aus zwei mit einander verbundenen Kugeln zusammengesetzte Doppelschwimmer, von welchen die eine Kugel sinkt, die andere auf dem Wasserspiegel schwimmt u. s. w., sind früher für die Geschwindigkeitsmessung angewandt worden, sind aber jetzt mehr und mehr ausser Gebrauch gekommen.

Pitot-Darcy'sche Doppelröhre.

Der Pitot-Darcysche Apparat besteht in der Hauptsache aus zwei verticalen Röhren, von welchen die eine unten um 90° gebogen und spitz ausgezogen ist. Senkt man den Apparat in einen Fluss mit der Spitze gegen den Strom, so erhält man in dem zugehörenden Rohr eine hydraulische Druchsäule, während in dem anderen Rohr eine hydrostatische Drucksäule aufsteigt. Der Höhenunterschied h wird an einer Skala abgelesen; für die Geschwindigkeit gilt eine Gleichung

$$u = \psi \sqrt{h}, \tag{475}$$

wo ψ eine Constante des Apparates ist. Wie ersichtlich erfordert die Anwendung dieses Apparates keine Zeitbeobachtung; er wird z. B. dann mit Vorteil benützt, wenn man die Geschwindigkeit am Boden oder am Wasserspiegel finden will.

Woltmanns Flügel.

Der Woltmannsche Flügel hat zwei an einer horizontalen Welle befestigte ebene oder schraubenförmige Schaufeln, welche von dem strömenden Wasser in Rotation versetzt werden. Die Umdrehungsgeschwindigkeit wird durch ein Zählwerk bestimmt, das aus zwei combinirten

gezähnten Rädern besteht, von welchen das eine durch eine auf der genannten Welle befindliche endlose Schraube in Bewegung gebracht wird. Das Räderzählwerk kann nach Belieben ein- oder ausgerückt werden. Der ganze Apparat ist vermittelst einer Hülse längs einer verticalen Stange verstellbar und ein Steuer dient zur Einstellung in die Stromrichtung.

Die Messung der Stromgeschwindigkeit mit Hülfe des Flügels geschieht so, dass er zuerst auf die gewünschte Tiefe eingesenkt wird, man beobachtet dann die Uhr und rückt zugleich das Zählwerk ein; nach einer passenden Zeit wird die Uhr wieder beobachtet und das Zählwerk ausgerückt, wonach der Flügel über Wasser gebracht und die Anzahl der Umdrehungen abgelesen wird. Daraus kann die Umdrehungsgeschwindigkeit berechnet werden; da die Umdrehungsgeschwindigkeit in einer bestimmten Beziehung zur Stromgeschwindigkeit steht, kann letztere auch erhalten werden, worüber mehr unten.

Der Woltmannsche Flügel ist auf mehrfache Weise vervollkomnet worden. Man hat das Instrument mit elektrischem Signalapparat versehen, so dass es nicht bei jeder Beobachtung aus dem Wasser gehoben zu werden braucht; auch hat man das Zählwerk ganz über Wasser angebracht. Man hat ausserdem den Apparat so construirt, dass der Flügel sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit längs einer Verticalen von der Oberfläche nach dem Boden oder umgekehrt bewegt und dabei auf mechanischem Wege eine Integration ausführt, aus der die mittlere Geschwindigkeit in der untersuchten Verticalen hervorgeht.

Bezeichnet n die Anzahl der Umdrehungen pro Secunde an dem gewöhnlichen Flügel, so ist die Stromgeschwindigkeit u erfahrungsgemäss

$$u = a + bn, \tag{476}$$

wo a und b zwei Constanten sind, die für jeden Apparat besonders bestimmt werden müssen. Zu diesem Zwecke

führt man den Flügel mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten u_1 und u_2 durch stillstehendes Wasser und beobachtet die Anzahl der Umläufe n_1 und n_2. Man erhält dann

$$u_1 = a + bn_1,$$

$$u_2 = a + bn_2$$

und berechnet daraus

$$a = \frac{n_1 u_2 - n_2 u_1}{n_1 - n_2},$$

$$b = \frac{u_1 - u_2}{n_1 - n_2}.$$

Statt sich mit zwei Beobachtungen zu begnügen, führt man besser eine grössere Anzahl solcher Beobachtungen aus und berechnet aus der ganzen Reihe die wahrscheinlichsten Werte von a und b mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 44.

Gleichförmige Bewegung in Canälen.

Im folgenden wird nur die permanente Bewegung des Wassers in Canälen untersucht. Sie wird dadurch gekennzeichnet, dass der Bewegungszustand sich nicht mit der Zeit ändert; durch jeden Querschnitt des Canales fliessen dann in gleichen Zeiten gleich grosse Wassermengen. Es wird vorausgesetzt, dass der Canal eine prismatische Form hat. Die Bewegung im Canal kann gleichförmig oder ungleichförmig sein. Wenn die Bewegung gleichförmig ist, so sind die einzelnen Wasserquerschnitte congruent und die mittlere Geschwindigkeit ist in allen die gleiche. Die freie Oberfläche bildet eine den Kanten des Prismas parallele Ebene und

schliesst mit der Horizontalebene einen kleinen Winkel (Fig. 233)

$$J = \frac{h}{l}$$

ein, der gleich dem relativen Gefälle ist. Zwischen dem relativen Gefälle, der Form des Canales, der Beschaffenheit des Canalbodens und der Wände sowie der unveränderlichen mittleren Strömungsgeschwindigkeit findet eine Beziehung statt, für welche eine grosse Zahl verschiedener Formeln aufgestellt worden ist. Einige von diesen Formeln mögen hier angeführt werden.

Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung.

Durch Integration der Differentialgleichung (459), d. h.

$$\frac{d(u^2)}{2g} = dA - dB - \frac{dp}{\gamma}$$

für eine Strecke l des Canales erhält man

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} = h - B_1 l - \left(\frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma}\right),$$

wo B_1 die Arbeit der Widerstände pro Längeneinheit und auf 1 kg Wasser bezogen ist. Bei gleichförmiger Bewegung ist $u = u_0$ und $p = p_0$. Dabei folgt

$$h = B_1 l. \tag{477}$$

Man setze jetzt voraus, dass das Wasser sich wie ein fester prismatischer Körper durch den Canal bewege, wobei Reibung am Boden und an den Canalwänden stattfindet, deren Grösse pro $1\,m^2$ mit ϑ bezeichnet werde; dann kommt auf die Länge 1 m der Reibungswiderstand $U\vartheta$ mit der Arbeitsleistung $U\vartheta u$ in einer Secunde. Da die Wassermenge pro Secunde $\gamma F u$ ist, so ergiebt sich

$$B_1 = \frac{U\vartheta u}{\gamma F u} = \frac{\vartheta}{\gamma}\frac{U}{F} = \frac{\vartheta}{\gamma}\frac{1}{R}. \tag{478}$$

Gemäss der Gleichung (477) wird jetzt

(479) $$\frac{\vartheta}{\gamma} = RJ.$$

Brahms und Chézy waren die ersten, welche auf theoretischer Grundlage eine Beziehung zwischen der mittleren Geschwindigkeit, dem relativen Gefälle und der Beschaffenheit des Canales aufzustellen suchten. Sie nahmen ϑ proportional mit u^2 an. Dieser Annahme entspricht

(480) $$u = c\sqrt{RJ},$$

wo c eine Constante ist, die experimentell ermittelt werden muss.

Wie spätere Untersuchungen gezeigt haben, hängt die Grösse c sowohl von der Beschaffenheit der Canalwände wie von dem hydraulischen Radius R ab; die verschiedenen Geschwindigkeitsformeln unterscheiden sich gerade durch die Bestimmung der Grösse c von einander.

Formel von Bazin.

Bazin hat die Formel

(481) $$c = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{R}}}$$

vorgeschlagen, wo α und β zwei Rauhigkeitsconstanten und zwar die nämlichen wie in der Formel (474) sind. In der „Hütte“ werden die Werte von c mit R als Argument für fünf verschiedene Kategorien von Canälen und Flüssen angeführt.

Formel von Kutter.

Eine complicirtere Formel rührt von Kutter her, nämlich

(482) $$c = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{J}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{J}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}};$$

nach derselben hängt c von einer einzigen Rauhigkeitsconstanten n ab; die Formel enthält aber ausser R noch das relative Gefälle J. Bei der Anwendung ist eine sinn-

reiche graphische Curvendarstellung sehr nützlich, mit Hülfe welcher der Wert einer der vier Grössen c, R, n und J gefunden wird, wenn die drei übrigen bekannt sind (Siehe „Hütte“).

Beispiel. Welches Gefälle muss ein Canal von den in der Figur 239 angegebenen Dimensionen erhalten, der in die Erde gegraben wird um ein künstliches Flussbett zu bilden, wenn 30 m³ Wasser pro Secunde abzuleiten sind?

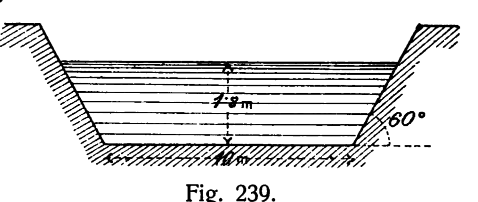


Fig. 239.

Man findet

$$F = 19.87 \text{ m}^2.$$

$$U = 14.16 \text{ m}.$$

$$R = \frac{F}{U} = 1.40 \text{ m}.$$

$$u = \frac{Q}{F} = \frac{30}{19.87} = 1.51 \frac{\text{m}}{\text{Sec}}.$$

Die Bazinschen Tabellen geben für $R = 1.40$ m $c = 43.4$. Damit ergiebt sich

$$J = \frac{u^2}{c^2 R} = \frac{1.51^2}{43.4^2 \,.\, 1.4} = 0.00086.$$

Bei der praktischen Ausführung kann man das Gefälle etwa gleich 1 : 1000 machen.

Vorteilhaftes Canalprofil.

Ein Canalprofil ist um so vorteilhafter, je grösser sein hydraulischer Radius ist. Denn u wächst mit R und zugleich wächst die Wassermenge, die durch den Canal abgeleitet werden kann. Bei einem constanten Werte von F ist R am grössten, wenn U am kleinsten ist. Es möge ein trapezförmiges Profil mit an beiden Seiten gleichen Böschungen näher untersucht werden (Fig. 240).

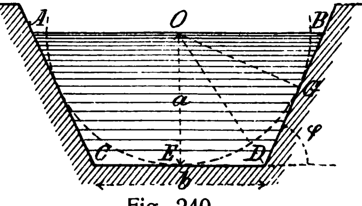


Fig. 240.

Mit den Bezeichnungen der Figur 240 ergiebt sich

$$U = b + 2\frac{a}{\sin\varphi}, \tag{483}$$
$$F = a\,(b + a\cot\varphi).$$

Nach Lagranges Verfahren durch Einführung eines unbestimmten Multiplikators erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial a} - \lambda\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{2}{\sin\varphi} - \lambda\,(b + 2a\cot\varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} - \lambda\frac{\partial F}{\partial b} = 1 - \lambda a = 0,$$

und durch Elimination von λ zwischen diesen Gleichungen folgt

$$\frac{2}{\sin\varphi} = \frac{b + 2a\cot\varphi}{a}$$

oder nach einer einfachen Transformation

$$\frac{b}{2a} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}. \tag{484}$$

Dieses Resultat erlaubt eine elegante geometrische Deutung. Der Halbirungspunkt O von AB werde mit D verbunden und dann ziehe man von O aus die Senkrechten OE und OG auf den Boden und die eine Wand des Canales. Dabei wird der Winkel EOG gleich φ. Nach der Gleichung (484) ist der Winkel EOD gleich $\frac{\varphi}{2}$. Also halbirt DO den Winkel EOG und OE ist gleich OG. Das Resultat kann folgendermassen ausgedrückt werden:

Das trapezförmige Canalprofil ist am vorteilhaftesten, wenn der Boden und die Wände von einem Kreise berührt werden, dessen Mittelpunkt im Wasserspiegel liegt.

Wenn das Profil ein Rechteck ist, so muss die Grundlinie gleich der doppelten Wassertiefe sein.

Bei gegebenen Werten von F und φ erhält man ohne Schwierigkeit für das vorteilhafteste Profil die Werte

$$
(485)\qquad
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{F \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}, \\
b &= \frac{F}{a} - a \cot \varphi.
\end{aligned}
$$

In der Praxis hat man oft Umstände zu berücksichtigen, welche eine Abweichung von der vorteilhaftesten Profilform bedingen, z. B. besondere Terrainverhältnisse, die Kosten des Bodenerwerbes oder Schwierigkeiten bei der Ausführung der Arbeit u. s. w.

§ 45.

Ungleichförmige Bewegung in Canälen.

Man betrachte einen kurzen geraden Canal mit rechteckigem Querschnitt von der constanten Breite b, welcher das Wasser von einem oberen in einen unteren Behälter leitet (Fig. 241). Der Neigungswinkel des Bodens, der als sehr klein vorausgesetzt wird, werde mit α, die Wassertiefe beim Eintritt mit a_0 und in dem Abstande x vom Eintritt mit a bezeichnet.

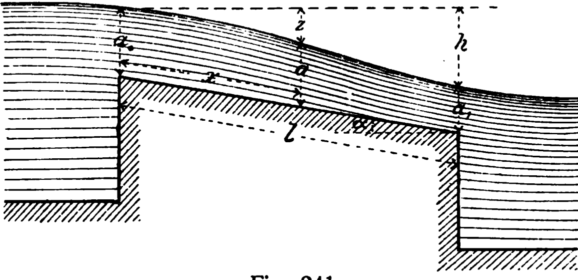


Fig. 241.

Bei einer gewissen bestimmten Höhe des Unterwasserspiegels findet eine gleichförmige Bewegung in dem Canal mit der mittleren Geschwindigkeit

(486) $$v = c\sqrt{a\frac{F_0}{U_0}} = c\sqrt{a\frac{a_0 b}{2a_0 + b}}$$

statt. Die Constante c kann zweckmässig durch eine Constante

(487) $$\zeta = \frac{2g}{c^2}$$

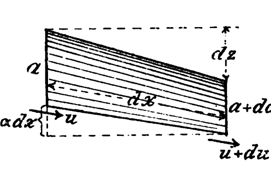
ersetzt werden, welche ein Widerstandscoefficient ist. Man erhält dabei

(488) $$v = \sqrt{\frac{2g}{\zeta}\frac{a}{}\frac{F_0}{U_0}} = \sqrt{\frac{2g}{\zeta}\frac{a}{}\frac{a_0 b}{2a_0 + b}}.$$

Wenn die Bewegung gleichförmig ist, so ist die Wassertiefe a_1 am Ende des Canales gleich der Tiefe a_0 im Anfang und übrigens überall die gleiche.

Man denke sich jetzt den Unterwasserspiegel gesenkt. Dabei geht die Bewegung entweder in eine beschleunigte über oder fährt fort gleichförmig zu sein. Die Bedingungen für diese beiden Fälle sollen näher untersucht werden.

Differentialformel für die Wassertiefe.



Eig. 242.

Man betrachte ein kurzes Stück der Wassermasse des Canales zwischen zwei verticalen Ebenen (Fig. 242), bezeichne mit u und $u + du$ die mittleren Geschwindigkeiten in den Endquerschnitten dieses Stückes und setze voraus, dass man mit den mittleren Geschwindigkeiten der Querschnitte rechnen kann und dass der Widerstandscoefficient für den Canal im ganzen derselbe ist. Auf dem Stück dx wird kinetische Energie verbraucht, und zwar teils zur Vermehrung der Geschwindigkeit, teils zum Überwinden der Bewegungswiderstände. Man erhält in Übereinstimmung damit die Gleichung

$$dz = \zeta dx \frac{U}{F}\frac{u^2}{2g} + \frac{(u + du)^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}$$

oder

$$dz = \frac{u^2}{2g}\left\{\zeta \frac{U}{F} dx + 2\frac{du}{u}\right\}. \tag{489}$$

Nun ist

$$u = \frac{Q}{ba}, \tag{490}$$

wo Q die in einer Secunde durchfliessende Wassermenge bezeichnet. Durch logarithmische Differentiation der Gleichung (490) ergiebt sich

$$\frac{du}{u} = -\frac{da}{a}.$$

Ferner hat man

$$dz = \alpha dx - da.$$

Aus diesen Gleichungen wird

$$\alpha dx - da = \frac{u^2}{2g}\left\{\zeta \frac{U}{F} dx - 2\frac{da}{a}\right\}$$

erhalten, sowie ferner

$$\frac{da}{dx} = \frac{\alpha - \zeta \frac{U}{F}\frac{u^2}{2g}}{1 - \frac{u^2}{ag}}$$

oder

$$\frac{da}{dx} = \frac{\alpha - \zeta \frac{2a+b}{ab}\frac{u^2}{2g}}{1 - \frac{u^2}{ag}} \tag{491}$$

als Differentialformel für die Wassertiefe a des Canales.

Bei einem kurzen Canal kann der Wasserspiegel oft als eben angesehen werden. Man berechnet dann seine Neigung aus der Gleichung (491), wenn man ein Paar zusammengehörender Werte von a und u einsetzt.

Beschleunigte Bewegung.

Damit die Bewegung beschleunigt sei, muss der Wert von $\frac{da}{dx}$ negativ sein. Mit zunehmendem x nimmt dann a ab und u wächst also.

Die Geschwindigkeit u in einem Querschnitte ist in diesem Falle grösser als die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2g\alpha}{\zeta}\frac{F}{U}}$$

einer im Canale möglichen gleichförmigen Bewegung; d. h. man hat

$$\alpha - \zeta \frac{U}{F}\frac{u^2}{2g} < 0.$$

Damit $\frac{da}{dx}$ negativ werde, muss also die Ungleichheit

$$1 - \frac{u^2}{ag} > 0$$

oder

$$u < \sqrt{ga} = \sqrt{2g\frac{a}{2}} \tag{492}$$

stattfinden. Benützt man die Bezeichnung

$$V = \sqrt{2g\frac{a}{2}} \tag{493}$$

für die der Geschwindigkeitshöhe $\frac{a}{2}$ entsprechende Geschwindigkeit, so ergeben sich bei der beschleunigten Bewegung die Ungleichheiten

$$v < u < V$$

oder

$$\sqrt{\frac{2g\alpha}{\zeta}\frac{ab}{2a+b}} < u < \sqrt{2g\frac{a}{2}}. \tag{494}$$

Die notwendige Bedingung dafür ist

$$v < V$$

oder

$$a < \frac{\zeta}{2}\left\{1 + 2\frac{a}{b}\right\}. \tag{495}$$

Hiermit ist ein Grenzwert gefunden, den das relative Gefälle nicht überschreiten darf, wenn eine beschleunigte Bewegung möglich sein soll.

Es kann vorkommen, dass die Bewegung innerhalb eines Teiles des Canales beschleunigt und nachher gleichförmig ist. Die gleichförmige Bewegung beginnt bei einer Wassertiefe *a*, welche die Gleichung

$$a = \frac{\zeta}{2}\left\{1 + 2\frac{a}{b}\right\} \tag{496}$$

erfüllt, und hat die Geschwindigkeit

$$v = V = \sqrt{2g\frac{a}{2}}. \tag{497}$$

Eine weitere Senkung des Wasserspiegels im unteren Behälter hat dabei keinen Einfluss auf die Bewegung im Canal. Das Wasser kann sogar durch einen Wasserfall ablaufen (Fig. 243).

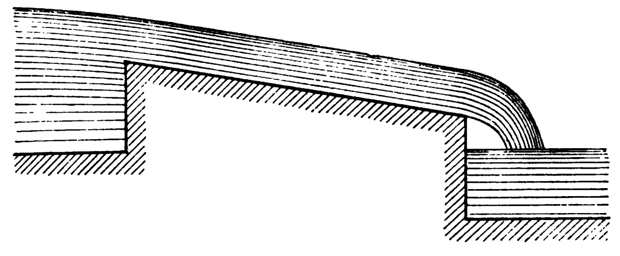


Fig. 243.

Wenn die Bedingung

$$a < \frac{\zeta}{2}\left\{1 + 2\frac{a_0}{b}\right\}$$

am Anfang des Canales erfüllt wird, so ist die Bewegung

wenigstens innerhalb eines Teils des Canales beschleunigt. Sie bleibt im ganzen Canal beschleunigt, wenn zugleich

$$a < \frac{\zeta}{2}\left\{1 + 2\frac{a_1}{b}\right\}$$

ist. Wird aber die letzte Ungleichheit nicht mehr befriedigt, so ergiebt sich der soeben betrachtete Fall, dass die Bewegung in irgend einem Punkte in eine gleichförmige übergeht.

Gleichförmige Bewegung im ganzen Canal.

Ist dagegen schon von Anfang an

$$(498) \qquad a \gtreqless \frac{\zeta}{2}\left\{1 + 2\frac{a_0}{b}\right\},$$

so ist die Bewegung im ganzen Canal gleichförmig und geschieht mit der Geschwindigkeit $\sqrt{a_0 g}$, vorausgesetzt dass der Unterwasserspiegel unter einer gewissen Höhe, sonst aber beliebig liegt.

Man wähle speciell $a = 0$, d. h. man betrachte einen horizontalen Canal. In demselben ist keine gleichförmige Bewegung möglich, da ihr die Geschwindigkeit Null entsprechen würde, wohl aber eine beschleunigte Bewegung. Die Differentialformel der Wassertiefe im Canal ist jetzt

$$(499) \qquad \frac{da}{dx} = -\frac{\zeta \frac{U}{F}\frac{u^2}{2g}}{1 - \frac{u^2}{ag}} = -\frac{\zeta \frac{2a_0 + b}{a_0 b}\frac{u^2}{2g}}{1 - \frac{u^2}{ag}}.$$

Verzögerte Bewegung.

Die Differentialformel (491) findet auch bei einer verzögerten Bewegung Anwendung, die z. B. durch Stauung entstanden ist. Dabei ist u kleiner als die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2ga}{\zeta}\frac{F}{U}}$$

einer gleichförmigen Bewegung und der Zähler der rechten Seite der Gleichung (491) folglich stets positiv.

Dieselbe Gleichung kann auch in die Form

$$(500) \qquad \frac{da}{dx} = a\frac{1-\zeta\frac{U}{F}\frac{1}{a}\frac{u^2}{2g}}{1-\frac{2}{a}\frac{u^2}{2g}} = a\frac{1-\frac{2g}{v^2}\frac{u^2}{2g}}{1-\frac{2}{a}\frac{u^2}{2g}}$$

gesetzt werden. Zwei Fälle sind möglich und müssen von einander unterschieden werden, und zwar je nachdem im ganzen Canal

$$(501) \qquad \frac{v^2}{2g} < \frac{a}{2}$$

ist, oder

$$(502) \qquad \frac{v^2}{2g} > \frac{a}{2}$$

werden kann. Im ersteren Falle nimmt mit wachsendem Werte von u der Zähler des Ausdruckes (500) schneller als der Nenner ab, während beide positiv bleiben. Je weiter man rückwärts längs des Canales schreitet, um so mehr nähert sich die Bewegung einer gleichförmigen und die Tiefe a einem Grenzwerte a_0 (Fig. 244). Die Staucurve hat als Asymptote eine durch die Tiefe a_0 bestimmte Parallele zum Canalboden. Die Bedingungen für das Zustandekommen dieser Art der Bewegung sind

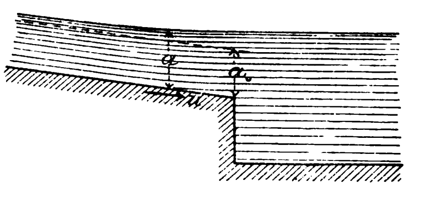


Fig. 244.

$$(503) \qquad \alpha < \frac{\zeta}{2}\left(1 + 2\frac{a_0}{b}\right)$$

und eine genügende Höhe des Unterwasserspiegels.

Wasserschwelle. Im letzteren Falle, der durch ein genügend grosses relatives Gefälle und eine entsprechende genügend grosse Geschwindigkeit v bedingt ist, ergiebt sich eine völlig

neue Form der Bewegung. Der Nenner auf der rechten Seite der Gleichung (500) kann jetzt gleich Null, somit $\frac{da}{dx}$ unendlich gross werden. Diesem Werte entspricht eine verticale Tangente der Staucurve. Eine nähere Untersuchung liefert die in der Figur 245 dargestellte Form dieser Curve. In Wirklichkeit entsteht nicht genau eine derartige Form, und zwar hängt dies damit zusammen, dass es in der Nähe der Stelle, wo $\frac{da}{dx} = \infty$ wird, nicht mehr erlaubt ist, nur mit der mittleren Geschwindigkeit der Querschnitte zu rechnen. Eine entsprechende Erscheinung mit einer plötzlichen Aufstauung oder eine sog. Wasserschwelle ist aber wirklich vorhanden (Fig. 246).

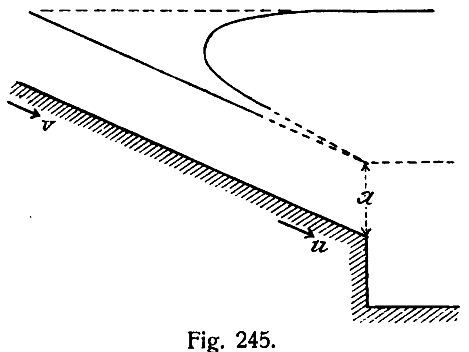


Fig. 245.

Fig. 246.

Zur Bestimmung der Höhe der Schwelle liefert der Satz der lebendigen Kraft

$$\frac{u^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = a_0 - a.$$

Ferner ist

$$u = v\,\frac{a_0}{a};$$

wendet man noch die Bezeichnung

$$H = \frac{v^2}{2g}$$

an, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$H = \frac{a^2}{a_0 + a}$$

und als Gleichung für die Berechnung der Schwellhöhe

(504) $$a = \frac{H}{2} + \sqrt{\frac{H^2}{4} + Ha_0}.$$

Mit $H = \frac{a_0}{2}$ wird $a = a_0$ erhalten. Man erkennt daraus, dass eine Wasserschwelle nur dann entstehen kann, wenn $H > \frac{a_0}{2}$ ist. In etwas anderer Form ist dieselbe Bedingung

(505) $$a > \frac{\zeta}{2}\left(1 + 2\frac{a_0}{b}\right).$$

Aufgaben betreffend die Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen, worunter vor allem die für die Praxis sehr wichtigen Stauprobleme sind von verschiedenen Autoren behandelt worden; finden aber hier keine Berücksichtigung, da sie eigentlich zur Lehre vom Wasserbau gehören.

§ 46.

Stoss des Wassers.

Stoss eines isolirten Wasserstrahles.

Wenn ein isolirter Wasserstrahl einen festen Körper trifft, so übt er einen Druck auf denselben aus. So lange ein veränderlicher Zustand in Bezug auf die gegenseitige Lage des Strahles und des Körpers und das Abrinnen des Wasserstrahles vom Körper stattfindet, ändert der Druck seine Grösse. Wenn nach einer gewissen Zeit ein permanenter Zustand eintritt, so dass die relative Lage des Körpers und des Strahles sich nicht ändert und das Wasser beständig in derselben Weise abrinnt, so bleibt auch der Druck des Strahles auf den Körper unverändert.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf diesen permanenten Zustand. Die Erscheinung wird Stoss des Wassers genannt, obgleich der Druck zwischen dem Strahle und dem Körper kein augenblicklicher Druck oder Stossdruck ist, sondern am besten mit einem hydraulischen Druck verglichen wird.

Gerader Stoss.

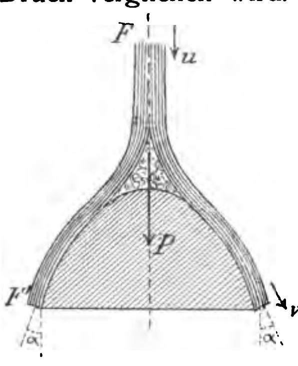


Fig. 247.

Zuerst mag der Stoss eines isolirten Wasserstrahles gegen einen unbeweglichen Umdrehungskörper behandelt werden, dessen Umdrehungsaxe mit der Axe des Strahles zusammenfällt (Fig. 247). Es wird vorausgesetzt, der Durchschnitt des Strahles sei sehr klein im Verhältnis zum Durchschnitt des Umdrehungskörpers, und die Richtungen der Geschwindigkeiten der Wasserteilchen ändern sich derart, dass sie parallel den Berührungsebenen des Körpers am äussersten kreisförmigen Rande abfliessen. Ausserdem wird angenommen, die ursprüngliche Geschwindigkeit u des Wassers im Strahle sei so gross, dass der directe Einfluss der Schwere des Wassers auf den zu ermittelnden Stossdruck P vernachlässigt werden kann. Der ursprüngliche Querschnitt des Strahles sei F, die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser vom Körper abfliesst,

$$v = nu,$$

wo n eine empirische Constante ist, welche im allgemeinen ein wenig kleiner als 1 ist und oft gleich 1 gesetzt wird; schliesslich sei α der Winkel, den die abfliessenden Wasserteilchen mit der Längsrichtung des Strahles bilden.

Der Druck P muss in Übereinstimmung mit dem folgenden, für einen einzelnen Punkt geltenden Resultate berechnet werden (Vergl. auch § 131, I). Ein Punkt von

der Masse m bewege sich geradlinig; auf ihn wirke eine constante Kraft P entgegengesetzt der Richtung der Bewegung. Während der Zeit dt vermindert sich die Geschwindigkeit des Punktes um den Betrag

$$\frac{P}{m}dt,$$

gleich dem Producte aus der Verzögerung in die Zeit. War die Geschwindigkeit des Punktes am Anfang der Zeit dt gleich u und ist sie am Ende gleich v ($= u + du$), so ist also

$$v - u = -\frac{P}{m}dt$$

oder

$$mv - mu = - Pdt. \tag{506}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Änderung der Bewegungsgrösse während der Zeit dt dar.

Man betrachte jetzt beim Stosse des Wassers die Wassermenge, welche zwischen einem Querschnitte F des Strahles und der ringförmigen Fläche vom Inhalte

$$F' = \frac{u}{v}F = \frac{1}{n}F$$

sich befindet, wo das Wasser vom Körper abfliesst. Durch den Querschnitt F bewegt sich in der Zeit dt die Wassermasse $\frac{\gamma}{g} Fudt$ und ihre Bewegungsgrösse ist $\frac{\gamma}{g} Fu^2dt$; durch den Querschnitt F' fliesst eine damit gleich grosse Wassermenge, für welche die Summe der Projectionen der Bewegungsgrössen auf die Axe des Strahles gleich

$$\frac{\gamma}{g} Fu\,v \cos\alpha \,.\, dt$$

ist. In Übereinstimmung mit der Gleichung (506) erhält man also

$$\frac{\gamma}{g} Fuv \cos\alpha \,.\, dt - \frac{\gamma}{g} Fu^2\, dt = -Pdt$$

und ferner, da $v = nu$ ist,

$$P = \frac{\gamma}{g} Fu^2 (1 - n\cos\alpha). \tag{507}$$

Der Stossdruck P ist folglich proportional dem Querschnitte des Strahles und dem Quadrate der Geschwindigkeit im Strahle.

Wählt man $n = 1$, so ergiebt sich

$$P = \frac{\gamma}{g} Fu^2 (1 - \cos\alpha). \tag{508}$$

Eine etwas andere Form dieser Gleichung ist

$$P = \frac{\gamma}{g} Qu (1 - \cos\alpha), \tag{509}$$

wo $Q = Fu$ die Wassermenge bezeichnet, die pro Secunde zum Stosse gelangt.

Wenn der Umdrehungskörper nicht in Ruhe ist, sondern eine Geschwindigkeit c in der Richtung von u besitzt, so muss die Geschwindigkeit u in den obigen Gleichungen durch die relative Geschwindigkeit $u - c$ des Strahles in Bezug auf den Körper ersetzt werden. Dabei ergiebt sich

$$Q = F(u - c), \tag{510}$$

$$P = \frac{\gamma}{g} F(u - c)^2 (1 - \cos\alpha) = \frac{\gamma}{g} Q(u - c)(1 - \cos\alpha). \tag{511}$$

Einige specielle Anwendungen der Gleichung (511) verdienen besondere Aufmerksamkeit.

Wenn die vom Strahle getroffene Fläche ein Ebene ist (Fig. 248), so hat man $\alpha = 90°$ und erhält

$$P = \frac{\gamma}{g} F(u - c)^2 = \frac{\gamma}{g} Q(u - c).$$

Bezeichnet man die der Geschwindigkeit $u - c$ entsprechende theoretische Druckhöhe mit

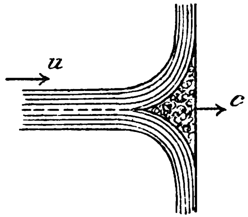


Fig. 248.

$$H = \frac{(u - c)^2}{2g},$$

so ist folglich

(512) $$P = 2\gamma HF,$$

d. h. *der Druck gegen die ebene Fläche ist gleich dem doppelten Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die den Querschnitt des Strahles als Grundfläche und die Druckhöhe als Höhe hat.*

Wenn der feste Körper eine hohle Halbkugel ist (Fig. 249), so erhält man $\alpha = 180°$ und

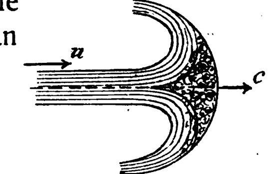


Fig. 249.

(513) $$P = 2\frac{\gamma}{g} F(u - c)^2 = 4\gamma HF,$$

d. h. der Druck ist doppelt so gross als bei einer ebenen Fläche.

Arbeitseffect.

Der Arbeitseffect des Strahles ist im allgemeinen Falle

(514) $$E = Pc = \frac{\gamma}{g} F(u - c)^2 c (1 - \cos\alpha);$$

er ist am grössten für $c = \frac{1}{3} u$ und hat dann den Wert

(515) $$E_{\max} = \frac{4}{27}\frac{\gamma}{g} Fu^3 (1 - \cos\alpha).$$

Schiefer Stoss.

Wenn ein Wasserstrahl eine ebene Fläche schief unter dem Winkel β trifft (Fig. 250) und das Wasser nur nach zwei Seiten abfliessen kann, so kommt von dem oben berechneten nor-

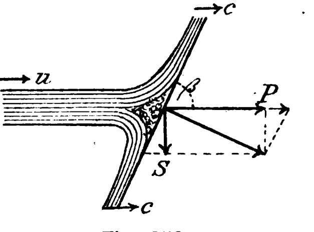


Fig. 250.

malen Drucke nur die auf die Ebene senkrechte Componente

$$\frac{\gamma}{g} F(u - c)^2 \sin \beta$$

in Betracht. Sie kann dann noch in zwei Componenten zerlegt werden, von welchen der sog. Parallelstoss mit der Grösse

$$P = \frac{\gamma}{g} F(u - c)^2 \sin^2 \beta \tag{516}$$

die Längsrichtung des Strahles hat und der auf den Strahl senkrechte sog. Seitenstoss

$$S = \frac{\gamma}{g} F(u - c)^2 \sin \beta \cos \beta \tag{517}$$

ist.

Druck strömenden Wassers.

Für den Druck, den das strömende Wasser auf die Begrenzungsfläche eines in das Wasser völlig eingetauchten Körpers ausübt, ist es nicht gelungen, zuverlässige theoretische Formeln abzuleiten; dasselbe ist der Fall beim Stosse eines isolirten Strahles gegen einen festen Körper, wenn die Wasserteilchen nicht in den Berührungsebenen des Körpers abfliessen. Man benützt erfahrungsgemäss zur Berechnung des Druckes unbegrenzten Wassers gegen eine zur Stromrichtung senkrechte ebene Fläche den Ausdruck

$$P = k\gamma F \frac{(u - c)^2}{2g}, \tag{518}$$

wo k eine empirische Constante ist. Bei kleinen Flächen ist $k = 1.86$ gefunden worden. Der Druck ist also kleiner als beim isolirten Stoss. Die Constante k hängt auch von der Länge des Körpers ab.

Widerstand des Wassers.

Eine der Gleichung (518) analog gebildete Gleichung

$$P = k'\gamma F \frac{u^2}{2g} \tag{519}$$

gilt für den Widerstand, den stillstehendes Wasser auf einen Körper ausübt, der mit der Geschwindigkeit u durch das Wasser gezogen wird.

§ 47.

Übungsaufgaben zur Hydrodynamik.

1) Man leite die Continuitätsgleichung für eine zusammendrückbare Flüssigkeit ab ($\gamma =$ einer Function von t).

2) Die Parabel in Fig. 216, mit Hülfe welcher der Geschwindigkeitscoefficient φ bestimmt worden ist, möge an der Öffnung eine Tangente besitzen, die unter dem kleinen Winkel ψ gegen die Horizontalebene geneigt ist. Die Grössen ψ, x und y sind bekannt; man bestimme φ. Wie erhält man ψ, wenn man zwei zusammengehörende Wertepaare x_1, y_1 und x_2, y_2 beobachtet hat?

3) Aus einem cylindrischen Gefäss vom Querschnitte F_1 fliesst das Wasser in ein anderes cylindrisches Gefäss vom Querschnitte F_2, das durch ein kurzes Rohr mit dem Querschnitte f in Verbindung mit dem ersten Gefässe steht. Man leite den Ausdruck

$$t = \frac{2F_1 F_2 (\sqrt{H} - \sqrt{h})}{\mu f (F_1 + F_2) \sqrt{2g}} \tag{520}$$

für die Zeit ab, während welcher der Höhenunterschied der beiden Flüssigkeitsspiegel von dem ursprünglichen Werte H bis zu dem Werte h sinkt. Wann tritt das Gleichgewicht ein?

4) Welche Wassermenge strömt pro Zeiteinheit durch eine Mündung, die ein Paralleltrapez mit der längeren Grundlinie im Flüssigkeitsspiegel ist?

5) Man bestimme den Ausfluss durch eine elliptische Öffnung in einer verticalen Wand. Die grössere Axe der Ellipse ist horizontal.

6) Ein Gefäss hat eine Bewegung in verticaler Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit geschieht der Ausfluss aus einer kleinen Öffnung im Boden?

7) Wie verändern sich die Formeln für den Stoss des Wassers, wenn der Strahl stets frische Flächen trifft, wie es z. B. bei einem Wasserrad der Fall ist, und wann wird der Effect unter diesen Umständen am grössten?

8) Man berechne den Stossdruck bei einem schiefen Stosse, wenn das Wasser nur nach der einen Seite abfliessen kann.

Register.

Die römischen Ziffern I und II geben die Nummer des Bandes, die arabischen Ziffern die Seitenzahl an.

A.

B.

C.

D.

G.

H.

I.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Z.

Bemerkte Druckfehler.

I

Seite	Zeile		steht	statt
Seite 236	Zeile 4	von unten	§ 46	§ 48
„ 304	„ 5	„ oben	(R)	R
„ 395	„ 5	„ unten	Ubergang	Übergang
„ 414	„ 14	„ oben	Ubungs	Übungs
„ 445	„ 1	„ unten	Berührugsfläche	Berührungsfläche
„ 449	„ 16	„ oben	die Gleitung	das Gleiten
„ 546	„ 9	„ unten	$v =$	$y =$
„ 568	„ 1	„ oben	ηl	$2\pi\eta l$
„ 659	in der Figur links		B	R
„ 676	Zeile 6	von unten	Rie	Die
„ 692	„ 11	„ oben	$s = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} at^2 \frac{G-P}{G} gt^2$	$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{G-P}{G} gt^2$
„ 713			Fig 451	Fig. 461
„ 717	Zeile 6	von oben	gemeimsame	gemeinsame
„ 749	„ 6	„ unten	erfärht	erfährt

II

Seite 38 unterste Zeile steht zusammengesetz statt zusammengesetzt
„ 56 Zeile 12 von oben steht Ubungsaufgaben statt Übungsaufgaben
„ 72 unterste Zeile „ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ statt $\sqrt{\frac{B}{F}}$
„ 163 Zeile 4 von unten steht Differentialgleichung statt Differentialgleichung der elastischen Linie
„ 181 Zeile 2 von oben steht m t statt mit



